50

noubiaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Juny 2024

noubiaix

número 50

Consell de redacció:
Noemí Ruiz / Carlos Giménez (coords.)
Montserrat Alsina
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Manuel Udina

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM),
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat

noubiaix@gmail.com

Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
Pluja geomètrica
Lucia Hueto i Anna Martínez
Escola Rellinars

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012
Impressió: Gráficas Rey

FSC
www.fsc.org

Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
comercial.edicions@ub.edu
www.edicions.ub.edu

sumari

Com tots i totes sabeu, el retorn a la normalitat en algunes àrees després de la pandèmia de la covid-19 està sent més lent del que seria desitjable. Aquest és el cas de la revista *NouBiaix*, per això volem començar disculpant-nos amb els autors i les autores que fa temps que esperen veure publicat el seu treball i amb els lectors i les lectores que potser van començar a pensar que la revista desapareixeria. A més, durant el 2023 s'ha produït un relleu en l'edició de la revista i s'ha iniciat un procés de revisió dels processos interns per aconseguir ser més eficients en la seva publicació. Per tant, el *NouBiaix* és una revista viva i desitgem poder-vos-en oferir molts números més.

Dins d'aquest procés de canvi, us informem que Marianna Bosch ha deixat l'edició per afrontar nous reptes professionals. Volem agrair-li la bona feina feta i la dedicació durant aquests anys al capdavant de la revista i desitjar-li molts èxits com a presidenta de l'Àrea Científica de Ciències de l'educació dins de la Divisió de Coordinació, Avaluació i Seguiment Científic i Tècnic de l'Agència Estatal d'Investigació d'Espanya.

En aquest número 50 s'han recopilat tres articles que conviden a reflexionar sobre la professió de docent de matemàtiques: el seu origen, els consensos i els reptes actuals i futurs. Tot això, amb una mirada constructiva, suggeriments sobre la necessitat de tenir una cultura compartida, i la ferma aposta que cal optar per fomentar el treball col·laboratiu de la comunitat. Els articles aporten mecanismes per seguir construint un cos docent i una infraestructura social preparada per afrontar els grans reptes que tenim i els que tindrem, a causa del món canviant en què vivim.

En la línia de les propostes anteriors, els articles següents mostren activitats orientades a l'educació primària (dins del nou projecte «Fem matemàtiques» de cinquè i sisè) que mostren com es pot, amb material manipulatiu, desenvolupar una activitat rica matemàticament. I al nivell universitari, que permet desenvolupar estratègies de resolució que involucren diferents conceptes o eines matemàtiques i com aquestes s'apliquen per resoldre problemes reals. L'última proposta s'emmarca fora del context escolar (prova pilot de «Mates al carrer» a Mataró) amb l'objectiu de contribuir a modificar la visió cultural de les matemàtiques i aporta les indicacions necessàries per reproduir-ho en altres ciutats de Catalunya i reprendre així un projecte global de territori.

El primer article amb què obrim aquest nou número de la revista *NouBiaix*, «Puig Adam i la formació contínua del professorat de matemàtiques», recull els principals fets, organismes (com el Centre d'Orientació Didàctica o la Comissió Internacional per a l'Estudi i la Millora de l'Ensenyament Matemàtic) i moviments, als anys cinquanta i seixanta del segle XX, que es van ocupar d'establir i concretar un marc general europeu, en relació amb l'ensenyament de les matemàtiques preuniversitàries, del que ara és el cicle actual d'educació secundaria. Una mostra d'això és el decàleg de la didàctica de la matemàtica publicat el 1955, ja que les línies que marca continuen regint la cultura educativa actual. L'article mostra en quin sentit el catedràtic català Pedro Puig Adam va visualitzar la importància de la formació del professorat d'educació secundària i les accions que va impulsar, que van implicar una millora del cos docent. Una visió històrica, que els docents més joves potser desconeixen, que permet ubicar l'origen dels fonaments de les línies de formació del professorat de matemàtiques actuals.

El segon article, titulat «Educació (matemàtica) és una arma de construcció massiva», parteix de reflexions sobre el paper de l'ensenyament de les matemàtiques i mostra les múltiples vessants d'aquestes des d'una visió global, considerant les diferents etapes educatives i el seu paper en la societat. Aporta idees i consideracions en relació amb els diferents agents que hi estan involucrats: des de l'esfera més política, passant per la formació del professorat, la investigació en educació matemàtica, les associacions de professionals, el treball en xarxa, les entitats de divulgació, etc., fins a la responsabilitat individual de cada docent. A més, amaga un misteri que descobrireu si arribeu al final de la lectura.

El tercer article és escrit per Jordi Deulofeu, coordinador des del 2013 fins al 2023 de l'actual màster interuniversitari en Formació del Professorat de Secundària de Matemàtiques i una de les persones referents en la difusió de la recerca en educació matemàtica. «Cap a on va l'ensenyament de les matemàtiques?» completa les línies marcades en els textos anteriors amb propostes actuals. El to optimista de l'autor, tot i les dificultats i els problemes que identifica, és contagiós i deixa clar que encara hi ha camí per explorar tots plegats. Finalment, ens sumem a animar a tothom a participar en el proper Congrés Català d'Educació Matemàtica: C^{2}EM 2025.

El quart article, titulat «Els menuts també fem *mates*» i escrit per Cynthia Riquelme i Tana Serra, defensa la necessitat de cultivar el raonament matemàtic des de l'etapa d'educació infantil, a partir de presentar als alumnes situacions riques que estimulin el seu pensament espontani i ajudin els mestres a disposar d'eines adequades per conduir el creixement d'aquest raonament matemàtic dels infants. En aquesta línia, presenten un exemple de l'activitat del Cercle de Mestres de l'Associació de Barcelona per l'Estudi i l'Aprenentage de les Matemàtiques (ABEAM); concretament, un repte per als més menuts anomenat Les Torres de la Reina, que de ben segur inspirarà els mestres d'aquesta etapa a incorporar aquest nou enfocament a les seves aules.

El cinquè article, escrit per Francesc Carreras i Antoni Magaña, presenta de manera força rigorosa possibles escenaris basats en dades reals d'àmbits molt diversos, com ara els jocs, l'economia, els esports i el món acadèmic, que poden resultar propers als estudiants i en els quals es justifica l'anàlisi d'aquestes dades a partir del model de regressió i correlació lineal.

Sens dubte aquest material permet al docent adaptar aquesta anàlisi a qualsevol joc de dades numèriques posant l'èmfasi en la inferència de conclusions estadístiques, molt més enllà de la mera descripció de les dades que acostuma a ser, malauradament, el màxim profit que s'obté a secundària d'aquest tipus d'informació. L'aplicabilitat a diferents treballs de recerca de batxillerat, per exemple, sembla òbvia per permetre legitimar el caire matemàtic de nombroses propostes STEM.

En el sisè article, Luis Cros ens descriu la reeixida iniciativa «Mates al carrer», resultat de l'activitat del corresponent grup de treball de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) i que es va plasmar en l'edició celebrada als carrers de Mataró l'octubre del 2022, que tindrà continuïtat en les edicions de Balaguer i Lleida.

Iniciatives com aquesta tenen un valor incalculable perquè donen sentit amb creativitat a l'objectiu compartit per tots nosaltres de normalitzar, donar visibilitat i naturalitzar la presència de les matemàtiques en l'entorn dels nostres alumnes i de les seves famílies.

articles

Puig Adam i la formació continuada del professorat de matemàtiques

Josefa Dólera-Almaida
j.doleraalmaida@um.es
Dolores Carrillo-Gallego
carrillo@um.es
Encarna Sánchez-Jiménez
esanchez@um.es
Departament de Didàctica de les Ciències Matemàtiques i Socials. Facultat d'Educació
Universitat de Múrcia

Resum

Amb l'aprovació de la Llei d'ordenació de l'ensenyament mitjà de 1953 es van dur a terme a Espanya diferents activitats de formació permanent adreçades al professorat d'educació secundària. El 1955 Pere Puig Adam, catedràtic d'institut de matemàtiques, va ser nomenat pel Centro de Orientación Didáctica (COD) per investigar sobre la reforma i la millora de l'ensenyament de les matemàtiques al batxillerat. A partir d'aquell moment va promoure nombroses activitats formatives per a aquest col·lectiu. L'objectiu d'aquest treball és identificar quines accions va desenvolupar Puig Adam, en l'àmbit de la formació continuada del professorat d'educació secundària, a la dècada dels cinquanta a Espanya. Per fer aquest treball s'han consultat diverses publicacions professionals. Ocupa un lloc destacat la revista *Enseñanza Media*, ja que s'hi van publicar nombroses cròniques sobre activitats de formació destinades al professorat de matemàtiques. Els resultats mostren que les idees metodològiques que es van exposar en aquestes reunions estaven lligades al model pedagògic de Puig Adam i les seves propostes d'ensenyament més característiques, entre les quals destacava el mètode heurístic.

Abstract

After enacting the Secondary Education Law in 1953, various initiatives aimed at providing continuing professional development for secondary education teachers were implemented in Spain. In 1955, Pere Puig Adam, professor at the Institute of Mathematics, was appointed by the Centro de Orientación Didáctica *(COD) to lead research on the reform and improvement of mathematics teaching in upper secondary education. Puig Adam started to actively promote numerous training activities for those students. This study mainly aims to identify the specific activities Puig Adam developed in the field of continuing professional development for secondary education teachers during the 1950s in Spain. Several professional publications were consulted to conduct this research. The journal* Enseñanza Media *was particularly important, as it published a large number of articles on teacher training initiatives aimed at mathematics teachers. The results show that the methodological ideas put forward in the publications were in line with Puig Adam's teaching model and his most characteristic teaching proposals, amongst which the heuristic method stood out.*

1. Introducció

La formació i perfeccionament del professorat d'educació secundària no va ser un aspecte prioritari per al govern del règim franquista entre 1936 i 1953 (Lorenzo, 1996, 2003). Aquesta tendència va començar a canviar a partir de la Llei d'ordenació de l'ensenyament mitjà de 1953 (Ministeri d'Educació Nacional, 1953), que, en l'article 42, deia:

> El Ministerio de Educación Nacional cuidará el nivel científico y pedagógico del Profesorado de Enseñanza Media, estimulando la mejora de los métodos, promoviendo, con las colaboraciones debidas, cursos de formación y de perfeccionamiento profesional, y vigilando las pruebas de suficiencia, selección y preparación (p. 1124).

La Llei pretenia impulsar la renovació i el perfeccionament dels mètodes educatius en l'educació secundària, així com assegurar l'adequada preparació científica i pedagògica del professorat de batxillerat. Per a això era necessari que es desenvolupessin institucions, experiències i publicacions que s'encarreguessin de promoure aquests aspectes formatius (Lorenzo, 1996, 2003). Per donar compliment a aquesta disposició, l'executiu va crear, entre altres òrgans, el Centro de Orientación Didáctica (COD) i la Escuela de Formación del Profesorado de Enseñanza Media per sengles ordres ministerials el 1954 i el 1955, respectivament[1] (Utande, 1964). També es van fer nombroses activitats concretes que van contribuir en gran manera a la modernització de l'ensenyament mitjà. Entre les principals activitats de formació permanent que es van dur a terme a Espanya a partir de la reforma de 1953 es troben les següents (Lorente, 2011):

a) *Reunions d'estudi de catedràtics, agrupats en seminaris didàctics, amb la participació d'inspectors especialistes*. Aquestes reunions, organitzades pel COD entre 1956 i 1957, pretenien renovar els mètodes d'ensenyament a través de l'intercanvi d'experiències docents en l'àmbit nacional.
b) *Reunions d'estudi*, convocades amb l'objectiu de fomentar la coordinació en cada districte universitari entre el professorat oficial d'instituts i el dels col·legis religiosos.
c) *Cursets d'actualització científica i didàctica*, dirigits prioritàriament al professorat de matèries experimentals.
d) *Viatges o excursions d'estudi*, que especialistes (inspectors i catedràtics) en determinades matèries fan al llarg de la geografia espanyola.
e) *Cursets de pràctiques per a professors no oficials* en determinades matèries (matemàtiques, física i química, ciències naturals i geografia i història).

El COD va tenir un paper rellevant en la formació continuada del professorat d'educació secundària, ja que una de les seves funcions principals era divulgar experiències d'aula i treballs de recerca entre el cos docent, així com organitzar i patrocinar reunions de professors per propiciar un contacte estret entre els diferents centres educatius (instituts i centres de l'Església i de l'ensenyament privat). La revista *Enseñanza Media* (1956-1971), dirigida per l'inspector Dacio Rodríguez Lesmes, va col·laborar activament en la tasca divulgadora del COD i es va fer ressò de moltes de les activitats de formació dirigides a aquest col·lectiu (Salcedo, 1956).

1. La Escuela de Formación del Profesorado de Enseñanza Media va ser creada com a dependència del Centre d'Orientació Didàctica i el 1962 va assumir les labors corresponents a la formació pràctica del professorat amb la intenció d'ampliar i centralitzar l'experiència iniciada anys abans pel COD, 1954-1968 (Lorenzo, 2003).

2. La Comissió Internacional per a l'Estudi i el Millorament de l'Ensenyament Matemàtic i la seva influència en la renovació de l'ensenyament de les matemàtiques a Espanya

El 1950 es va crear la Comissió Internacional per a l'Estudi i el Millorament de l'Ensenyament Matemàtic (en anglès, International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching, CIEAEM) amb l'objectiu d'abordar els problemes de l'ensenyament de les matemàtiques, sobretot en l'educació primària i secundària. Va ser impulsat pel professor Caleb Gattegno, professor de didàctica matemàtica de l'Institut d'Educació de la Universitat de Londres. La Comissió pretenia aprofitar les perspectives que es podien aportar des de l'epistemologia, la psicologia o la pedagogia per millorar l'ensenyament de les matemàtiques. Entre els seus membres hi havia figures rellevants del panorama internacional de diferents camps disciplinaris: epistemòlegs i psicòlegs, com Jean Piaget i Ewart W. Beth; matemàtics, com Gustave Choquet, Jean Dieudonné i André Lichnerowicz; i pedagogs, com Caleb Gattegno, Emma Castelnuovo i Willy Servais (Hodgson *et al*., 2013).

La Comissió considerava que per assolir una reforma profunda i eficaç dels programes, els mètodes i les fórmules usades en l'ensenyament es necessitava:

> [...] de un lado, el conocimiento profundo de las estructuras matemáticas y, de otro, el conocimiento no menos esencial de los procesos evolutivos de la inteligencia y afectividad del niño, no sólo para comprender mejor la génesis de los conceptos y juicios matemáticos en su mente, sino también para tener en cuenta los factores de atracción e interés que pueden estimularla y favorecerla (Puig, 1955a, p. 96).

Entre les diferents funcions de la CIEAEM ocupaven un lloc destacat la coordinació de les recerques que desenvolupava en diferents països i l'impuls de treballs conjunts. Per dur a terme aquestes funcions, la Comissió va optar per organitzar reunions internacionals amb l'objectiu d'habilitar un espai propici per a l'intercanvi d'opinions i punts de vista. També va promoure la formació de grups de treball (nacionals i internacionals) i va apostar per publicar les seves recerques en obres conjuntes, amb la finalitat de divulgar-les entre el professorat. Quant a l'ensenyament de les matemàtiques, en la segona dècada dels cinquanta es van editar les obres *La enseñanza de las matemáticas* (Piaget, J. *et al*., 1971) i *El material para la enseñanza de las matemáticas* (Gattegno, C. *et al*., 1967).

Pere Puig Adam (Barcelona, 12 de maig de 1900 — Madrid, 12 de gener de 1960), catedràtic de matemàtiques de l'Instituto de Enseñanza Media San Isidro (Madrid), es va incorporar a la CIEAEM el 1955 i a partir d'aleshores va participar activament en les activitats organitzades per la Comissió. A tall d'exemple, s'al·ludeix al paper destacat que Puig Adam va tenir en l'organització de la XI Reunión de la CIEAEM (Madrid, 1957), esdeveniment que es va fer juntament amb la I Exposición Internacional de Material Didáctico Matemático. Aquestes activitats van despertar un gran «interés entre el profesorado, ya que era el primer Certamen internacional que la historia de la ciencia registra sobre el material didáctico matemático» (Puig, 1958b, p. 7). Amb l'objectiu de fer arribar al professorat d'aquesta disciplina informació detallada del que allí s'esdevingué, el Ministerio de Educación Nacional va publicar el llibre *El material didáctico matemático actual* (Puig, 1958), dedicat a la Reunión — Exposición (figura 1). La revista professional *Enseñanza Media* va subratllar que aquesta publicació era «un valuoso elemento de orientación y trabajo para los profesores de nuestra Enseñanza Media» (*Enseñanza Media*, 1959, p. 210).

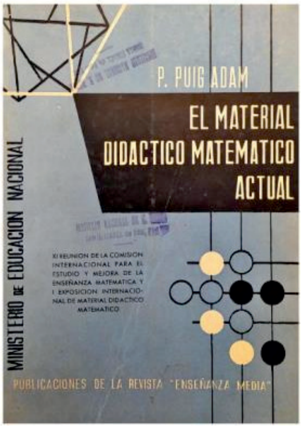


Figura 1. Coberta del llibre *El material didáctico matemático actual.*

També és remarcable la participació de Puig Adam com a membre del grup de treball que va elaborar les «Recomendaciones» per a l'ensenyament de les matemàtiques en la XIX Conferència Internacional d'Instrucció Pública (Ginebra, 1956), organitzada per la Organització de les Nacions Unides per a l'Educació, la Ciència i la Cultura (en anglès, United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, UNESCO) i per l'Oficina Internacional d'Educació (OIE), la direcció de la qual era ocupada per Piaget en aquell moment (González, 2008; Lozano, 1956; Puig, 1955a).

El moviment internacional de renovació de la matemàtica que s'estava desenvolupant en la dècada dels cinquanta i al qual s'ha fet referència en paràgrafs anteriors, pràcticament va coincidir en el temps amb l'aprovació de la Llei d'ordenació de l'ensenyament mitjà (1953). Probablement, algunes de les accions que l'executiu va idear per impulsar la renovació de l'ensenyament de les matemàtiques, a Espanya, van estar influenciades per les recerques sobre l'ensenyament de les matemàtiques que la CIEAEM estava fent. Una mostra d'això podria ser el nomenament, el 1955, de Puig Adam pel COD per investigar sobre la reforma i la millora de l'ensenyament matemàtic en l'àmbit nacional. A partir d'aquest moment Puig Adam es va preocupar d'incrementar les relacions internacionals amb diversos països europeus per tractar qüestions significatives de l'ensenyament mitjà i va organitzar reunions dirigides a catedràtics de matemàtiques de tot Espanya, en les quals s'informava, entre altres aspectes, dels nous mètodes i materials que s'estaven utilitzant fora de l'àmbit nacional. Puig Adam considerava que la formació del cos docent no finalitzava amb l'obtenció del títol; creia que, en aquesta tasca, mai no s'acaba d'aprendre perquè «cuando se sabe leer en el libro abierto de una clase, nunca se termina el proceso de acumulación de experiencias y mejora y adaptación consecuente de procedimientos» (Puig, 1958a, p. 10). Per això es va involucrar i va participar de manera activa en les activitats de formació permanent del professorat de grau mitjà i va arribar a dirigir-ne algunes.

A l'hora de valorar les mesures posades en marxa pel règim, cal destacar que molts dels models pedagògics sobre els quals es basava aquesta «renovació» s'inspiraven en els postulats de l'escola nova, per la qual cosa «no fueron tan Nuevos y avanzados» (Lorente, 2011, p. 682.) És més, alguns autors, com Mainer (2009) i Viñao (2014), consideren que no va arribar a produir-se una ruptura total amb els models pedagògics instauratsabans de la Guerra Civil i que s'aprecia una certa continuïtat entre els models de formació del professorat abans i després del conflicte armat.

L'objectiu d'aquest treball és identificar quines accions va dur a terme Puig Adam, en l'àmbit de la formació continuada del professorat d'educació secundària, per promoure la renovació de l'ensenyament de les matemàtiques en el batxillerat durant la dècada dels cinquanta a Espanya.

Per a la realització d'aquest treball s'han consultat diverses publicacions professionals, com ara, entre d'altres: *Revista de Educación*, *Revista de Segunda Enseñanza*, *Gaceta Matemática*, *Boletín de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral* i *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques*. S'ha prestat una atenció especial a la revista *Enseñanza Media*, ja que s'hi van publicar cròniques de moltes de les activitats de formació permanent dirigides al professorat de matemàtiques que es van fer en la dècada dels cinquanta. És més, el mateix Pere Puig Adam va reconèixer a la publicació la seva tasca en la divulgació de les experiències desenvolupades entorn de la disciplina de les matemàtiques i va agrair-li l'interès mostrat, malgrat que no era una revista especialitzada en aquesta matèria. Fet que, va assenyalar contrariat, contrastava amb l'escassa atenció que algunes publicacions expertes en la disciplina havien prestat a aquestes activitats (Puig, 1958b).

Aquest estudi forma part d'una recerca més àmplia sobre les aportacions del professor Pere Puig Adam a l'educació matemàtica espanyola. Els resultats obtinguts han donat lloc a alguns treballs: Dólera i Sánchez (2019, 2023); Dólera *et al.* (2023a, 2023b); Dólera i Carrillo (2023a, 2023b).

3. Activitats formatives per al professorat d'educació secundària de matemàtiques

Les activitats de formació professional a les quals s'al·ludeix en els apartats següents van començar el 1956, després que el COD encarregués a Puig Adam de promoure una recerca sobre les possibilitats de millora de l'ensenyament de les matemàtiques al batxillerat. Entre 1956 i 1960 —any en què va morir Puig Adam— es van fer, a escala nacional, tres reunions d'estudi de catedràtics a Madrid (1956-1957) i tres reunions d'estudi per al professorat d'un mateix districte universitari; aquestes últimes es van celebrar a Granada (1956), València (1958) i Huelva (1960). Per al professorat no oficial que impartia la disciplina de matemàtiques, Puig Adam va dirigir un curset de pràctiques a l'Instituto de Enseñanza Media San Isidro de Madrid (1958). En els apartats següents es fa referència a les activitats formatives en les quals Puig Adam va participar de manera activa i es presta un interès especial a les aportacions que va fer el professor en aquestes reunions.

3.1. Reunions d'estudi per a catedràtics

En l'àmbit nacional, la I Reunión de Estudio de Catedráticos de Matemáticas (Redacción, 1956) va tenir lloc entre els dies 20 i 24 de març de 1956 a Madrid. Un dels acords aconseguits va ser adoptar com a norma general d'actuació didàctica el «Decálogo de la didáctica de la matemática media», que va ser publicat per Puig Adam en la revista *Gaceta Matemática* el 1955 i que establia el següent (Puig, 1955b):

I. No adoptar una didáctica rígida sino amoldarla en cada caso al alumno.
II. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
III. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.
IV. Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.
V. Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.
VI. Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.
VII. Promover en todo lo posible la autocorrección.
VIII. Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.
IX. Cuidar que la expresión del alumno sea traducción de su pensamiento.
X. Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

A més, Puig Adam, juntament amb la resta d'assistents, van decidir afegir a les orientacions anteriors la consideració següent:

> Ejercer una constante observación sobre las reacciones de los alumnos, adoptando una postura objetiva y experimental en nuestra función didáctica, y tratando al alumno, de acuerdo con la psicología, con afecto en lugar de coacción, para obtener de él el máximo rendimiento (Redacción, 1956, p. 48).

La II Reunión de Estudio de Catedráticos de Matemáticas (Redacción, 1957a) es va fer entre el 22 i el 28 d'octubre de 1956. El programa de la reunió contenia, entre altres, els temes següents: fins de l'ensenyament, mètodes d'ensenyament heurístic i models dinàmics (Redacción, 1960, p. 134). Quant al primer d'aquests aspectes, es va acordar:

> [...] nuestra enseñanza persigue, debe perseguir siempre, no ede la preparación del alumno para el examen, sino la formación edescobri del mismo. No adiestrar al alumno para que se aprenda muchas edescob edescobrir en un momento dado o enuncie edesc operatorias sin penetrar su significado, sino capacitarle para sentir, dotarle del edesc de hacer Matemática; hacerle ver, operar y edesco. En una palabra: hacerle edescobrir (Redacción, 1957a, p. 10).

Els professors reunits reconeixien que era urgent revisar els mètodes d'ensenyament. Sostenien que els mètodes actius havien de desplaçar la classe conferència, encara molt arrelada en l'ensenyament espanyol d'aquella època i en la qual el docent solia actuar com un mer transmissor d'informació. Van coincidir a afirmar:

> [...] dentro de la enseñanza activa, el modo eurístico [sic] viene a ser su principal manifestación, tal vez su palanca más potente; la manera más sencilla de crear en el alumno los centros de interés, de estimular su facultad creadora, de despertar sus dotes de observación (Redacción, 1957a, p. 12).

Puig Adam es va interessar pel mètode heurístic des dels seus inicis com a catedràtic. Ho diu en el seu primer treball sobre educació matemàtica (Puig, 1926), que va publicar el mateix any que va aprovar l'oposició a catedràtic d'institut, i ho va continuar portant a la pràctica durant tota la seva trajectòria professional. En són una mostra els nombrosos treballs que va publicar sobre metodologia heurística, en els quals oferia al professorat exemples detallats de lliçons heurístiques que havia implementat amb els seus alumnes. Entre aquests treballs es troba la seva obra més característica, *Didáctica matemática eurística* (Puig, 1956), que va ser avalada i publicada per l'Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

Puig Adam considerava que aquesta manifestació de l'ensenyament actiu estava destinada a ocupar un paper rellevant en la millora i renovació de la didàctica matemàtica i no va dubtar a aprofitar l'oportunitat de familiaritzar els qui van assistir a aquesta reunió amb el mètode heurístic. Amb aquesta intenció, va desenvolupar davant el públic algunes lliçons heurístiques. Per exemple, va fer-ne una sobre geometria de l'espai amb dotze alumnes de segon curs de batxillerat, en la qual, a través de materials quotidians, com ara carpetes i agulles de tricotar, va treballar amb els estudiants el paral·lelisme de plans, el paral·lelisme de rectes i les posicions relatives entre recta i pla (figura 2).

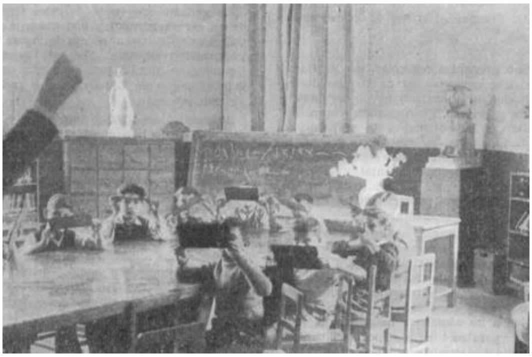


Figura 2. Moment d'una classe heurística sobre geometria de l'espai.
Font: Redacción (1957a, p.13).

Després de cada lliçó, Puig Adam iniciava amb el professorat assistent una animada xerrada sobre el que allí s'havia esdevingut. Amb això tractava de promoure una reflexió crítica del professorat sobre determinats aspectes: els continguts treballats, el rendiment de l'alumnat, l'interès que despertava en els nens l'activitat proposada i el material emprat, entre altres. Finalment, es va valorar la possibilitat d'implantar el mètode heurístic a les aules espanyoles i es va concloure que un dels seus principals inconvenients era l'excessiu nombre d'alumnes per professor que en general hi havia a l'aula.

Puig Adam també va remarcar els beneficis de l'ús dels models dinàmics en l'ensenyament de les matemàtiques. A tall d'exemple, va presentar al professorat assistent alguns dels materials que ell mateix havia elaborat, entre els quals hi havia el de «l'arrel quadrada» (figura 3), que li va permetre treballar amb els seus alumnes de segon curs de batxillerat l'estructura operatòria de l'arrel quadrada amb materials quotidians (botons, tires i cartons). Es tractava de construir amb botons, una vegada s'havia representat el nombre del qual es volia obtenir l'arrel quadrada, el major quadrat possible (descomponent, si era necessari, les unitats d'ordre superior en altres d'ordre immediatament inferior). D'aquesta manera, l'arrel quadrada es corresponia amb el costat del quadrat i els botons sobrants representaven la resta de l'operació (Puig, 1932).

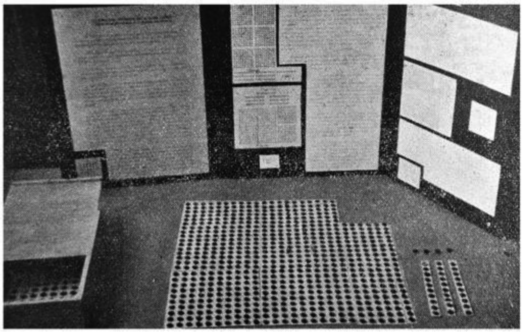


Figura 3. Material per desenvolupar la lliçó heurística sobre la regla de l'arrel quadrada.
Font: Puig Adam (1958b, p. 110).

La III Reunión de Estudio de Catedráticos de Matemáticas (Redacción, 1957b) va tenir lloc entre el 10 i el 16 de desembre de 1956 i s'hi va reflexionar col·lectivament sobre les orientacions metodològiques que havien de regir els quatre primers cursos de batxillerat. Fruit d'aquesta reflexió, es va considerar que els dos primers cursos de batxillerat havien de tenir un marcat caràcter intuïtiu i pràctic, i havien de recórrer a l'ús de procediments preferiblement empírics, com, per exemple, el plegat, el paper transparent o els fils per a l'estudi de la geometria. Els cursos tercer i quart, en canvi, van ser definits com un cicle que constituïa una etapa de transició entre els mètodes o procediments empírics i el mètode racional, on els coneixements matemàtics es presentaven constituint una estructura lògica perfectament entrellaçada. Es va incidir, igualment, en la conveniència de presentar la matemàtica a partir d'exemples concrets, extrets igualment de la vida real de l'alumne, que servia així com a exemple d'aplicació pràctica. També es va posar l'accent en la utilització o construcció de models geomètrics senzills per part de l'alumnat, ja que es va considerar que fins i tot la mera observació permetia als alumnes identificar nombroses propietats matemàtiques.

Arran de les reflexions metodològiques anteriors, Puig Adam va destacar l'eficaç ajuda que els models dinàmics prestaven a l'ensenyament heurístic de les matemàtiques i va ressaltar l'interès que despertaven entre els estudiants. Igual que en la reunió anterior, va presentar davant els seus companys alguns dels últims materials que havia ideat, entre els quals va ocupar un lloc destacat el seu model de geoespai, per a l'estudi de la geometria espacial (figura 4), del qual va construir diverses versions.

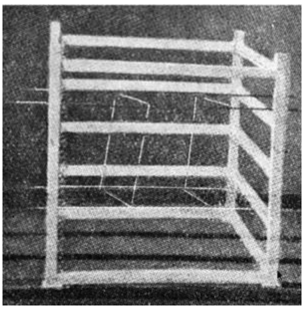


Figura 4. Representació amb el geoespai d'un model deformable de paral·lelepípede.
Font: Puig Adam (1957, p. 25).

El geoespai de Puig Adam estava inspirat en el geoplà del professor Gattegno i consistia en una caixa les cares de la qual estaven construïdes amb llistons estrets. Això permetia que les configuracions que es representaven dins de la caixa poguessin ser vistes per l'estudiant des de qualsevol perspectiva. Puig Adam destacava que la versatilitat d'aquest material li havia permès treballar amb els seus alumnes nombrosos continguts de la geometria espacial, com, per exemple, la construcció de figures espacials amb cordills. A més, els llistons podien ser substituïts per teles metàl·liques (figura 5), ja que aquesta modificació no comprometia la visibilitat del model (Puig, 1957).

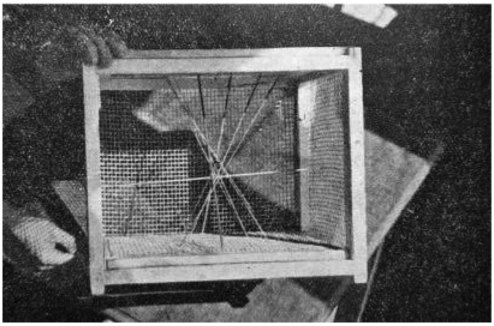


Figura 5. Detall d'un geoespai amb tela metàl·lica dissenyat per Puig Adam.
Font: Puig Adam (1958b, p. 114).

3.2. Curset sobre didàctica de les matemàtiques per a professors no oficials

Des de la I Reunión de Estudio de Catedráticos de Matemáticas (Redacción, 1956), el professorat oficial va comprendre que la millora de l'ensenyament matemàtic espanyol requeria la implicació de tota la comunitat educativa (tant de l'ensenyament oficial com del no oficial). Per això, consideraven necessari que des del COD s'emprengués una «campanya renovadora de la Didáctica» dirigida expressament al professorat de centres d'ensenyament no oficial. Se suggeria que el COD havia de proporcionar a aquests centres orientació i bibliografia específica sobre els nous mètodes d'ensenyament, i, en cas que fos necessari, havia d'afavorir el contacte directe entre aquests centres i persones qualificades que poguessin oferir-los una orientació més individualitzada (inspectors del districte, catedràtics de la localitat, llicenciats especialitzats, etc.). Es considerava convenient que es fomentessin activitats per suscitar interès per la renovació de la didàctica matemàtica, com ara conferències, reunions d'estudi, exposicions de materials o models didàctics, exemplificacions de lliçons d'aula, projeccions didàctiques, etc.

Davant aquesta demanda, el 1958 Puig Adam va dirigir un curs sobre didàctica de les matemàtiques al batxillerat adreçat al professorat de l'ensenyament privat (*Enseñanza Media*, 1958). Amb aquesta activitat, que va ser organitzada pel COD entre el 14 de febrer i l'1 de març a l'Instituto San Isidro, es pretenia aportar orientacions didàctiques i metodològiques al professorat que impartia matemàtiques en centres privats i que no havia rebut formació específica sobre la disciplina que ensenyava.

Puig Adam va fer davant els cursetistes diverses lliçons heurístiques en les quals van col·laborar grups reduïts d'alumnes que pertanyien a diferents cursos de l'Instituto San Isidro. Per posarne algun exemple, al·ludirem a una lliçó sobre simetries en el pla que va dur a terme amb alumnes de primer curs de batxillerat i en la qual va emprar com a material didàctic cartons amb figures geomètriques retallades; o bé a una altra lliçó sobre volums de prismes i piràmides que va fer amb alumnes de segon i tercer curs de batxillerat i en la qual va utilitzar el geoespai que porta el seu nom per representar, mitjançant gomes, la descomposició del prisma en tres piràmides equivalents. Això va permetre als alumnes, segons el professor, deduir l'obtenció del volum de la piràmide a partir de la del prisma, regla que, fins a aquell moment, era desconeguda per ells.

4. Reflexions finals

Les activitats de formació que el COD va organitzar per al professorat de la disciplina de matemàtiques entre 1955 i 1960 tenien un objectiu comú: posar en contacte el professorat de matemàtiques d'ensenyament mitjà (Redacción, 1956). Segons Puig Adam (1958a, p. 11), que va col·laborar de manera activa en aquesta tasca, la «base indispensable» de la formació continuada del professorat residia en «una intensa vida de relación entre el cuerpo enseñante». Que el desenvolupament de lliçons model davant els assistents fos una activitat recurrent en les reunions i els cursos que Puig Adam organitzava, es corresponia amb la concepció que el catedràtic tenia sobre com havia de fer-se la formació didàctica del professorat d'educació secundària de matemàtiques, que, segons ell (1958a, p. 9), s'assemblava a «la adquisición de un arte, y que el artista, si no nace ya creador, sólo puede ir haciéndose a fuerza de contagio».

Puig Adam creia que per a la millora de l'ensenyament de les matemàtiques eren fonamentals la implicació i la formació adequada del professorat. Seguia així les propostes de la Institución Libre de Enseñanza (ILE), com va expressar Giner de los Ríos en el discurs d'inauguració del curs 1880-1881: «dadme el maestro y os abandono la organización, el local, los medios materiales; cuantos factores, en suma, contribuyen a auxiliar su misión. Él se dará arte para suplir la insuficiencia o los vicios de cada uno de ellos». Aquestes idees van ser també recollides en el decret de creació de l'Institut-Escola, amb el qual Puig Adam va tenir relació a través del Seminario Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios (JAE). Puig Adam considerava que l'organització de reunions de seminari periòdiques entre el professorat era una eina eficaç de canvi:

> [...] el profesor aislado, en ambiente alejado de los grandes centros de cultura, pierde contacto con el mundo científico en gestación, deja de percibir sus latidos, como no se alimente de tanto en tanto su comunicación con él por medio de envío de revistas, organización de cursillos de ampliación de conocimientos, intercambios, reuniones. Esta formación poscátedra es complemento necesario de la anterior [formación inicial], y yo diría que casi tan importante como ella (Puig, 1958a, p. 11).

Les idees metodològiques que es van exposar en aquestes reunions constitueixen la base de les deu normes didàctiques per a l'ensenyament de les matemàtiques en el batxillerat que Puig Adam va elaborar el 1955. La importància d'aquest «Decálogo de la didáctica matemática media» (Puig, 1955b) resideix en el fet que, després de la seva publicació, va ser adoptat pels professors d'educació secundària espanyols en l'exercici de la seva tasca docent i es va presentar en la XIX Conferència Internacional d'Instrucció Pública (Ginebra, 1956), i, segons Ausejo (2013), moltes de les conclusions d'aquesta conferència coincidien amb les expressades per Puig Adam en el seu decàleg. En l'actualitat, aquestes normes o orientacions metodològiques «constituyen una referencia obligada para todos los educadores matemáticos en el actual siglo XXI» ja que «trascienden en el tiempo, en el contexto de las transformaciones que tienen lugar en la enseñanza de las ciencias» i, per tant, són un referent per a les noves generacions de professors de matemàtiques (Arteaga, del Sol i Medina, 2021, p. 348).

L'evolució de l'enfocament donat als ensenyaments (des de l'intuïtiu i pràctic, amb introducció gradual del raonament, fins a arribar als mètodes racionals) i l'ús de materials com a models (fomentant els relacionats amb la vida diària) van ser temes d'interès en les activitats de formació professional que es van dur a terme. Aquestes idees continuen les que Puig Adam havia portat a la pràctica abans de la Guerra Civil i que es troben en els treballs que va publicar sobre ensenyament de les matemàtiques des de 1926 fins a 1939 (Puig, 1926, 1927, 1979). Són propostes concordants amb la pràctica de l'Instituto-Escuela de Madrid i l'Institut-Escola de Barcelona. Puig Adam compartia moltes de les idees sobre l'ensenyament de les matemàtiques de Josep Estalella, qui va dirigir l'Institut-Escola des de 1932 fins a la seva mort, el 1938. Tots dos professors consideraven que les «activitats d'experimentació» exercien un paper fonamental en l'educació matemàtica de l'alumne (Grup Cúbic, 2019, p. 94), en el sentit que tot coneixement havia de ser obtingut mitjançant una acció que ho provoqués. Josep Estalella va conferir a la institució catalana un estil propi que va ser molt benvolgut per Puig Adam. Mostra d'això és el fet que, quan el 1937 va haver d'abandonar l'Instituto San Isidro de Madrid —a causa de la proximitat del front de batalla—, va sol·licitar el seu trasllat com a professor a l'Institut-Escola. Després de la defunció d'Estalella, en plena Guerra Civil, Puig Adam va ser nomenat director del centre i va continuar en aquest lloc fins a l'estiu de 1939, tractant de salvar l'obra d'Estalella en un institut que ja havia canviat el seu nom pel de Verdaguer.

Les aportacions més personals de Pere Puig Adam en aquestes reunions estan lligades a les seves propostes d'ensenyament matemàtic més característiques: el mètode heurístic i els models dinàmics. Puig Adam, com a membre de la CIEAEM, estava al corrent dels avenços que s'estaven duent a terme en diferents països sobre aquests aspectes i va propiciar la seva difusió en la major part de les trobades que organitzava el COD per al professorat. Amb l'execució, davant els assistents, d'aquestes lliçons heurístiques —en les quals utilitzava generalment models dinàmics— Puig Adam pretenia proporcionar instruments de canvi metodològic al cos docent. A més, la reflexió col·lectiva que es desenvolupava després de cada intervenció, i que ell mateix fomentava, buscava que cada professor construís els seus nous coneixements sobre l'ensenyament de les matemàtiques de manera activa, a través del diàleg amb els altres, com feia ell en les seves classes amb els seus alumnes (Puig, 1956). Aquesta és una conducta que està en línia amb els objectius de la ILE: actuació a través del professorat amb accions per a una millor formació del professorat.

Les conclusions que van sorgir d'aquestes reunions van donar lloc a propostes i idees interessants que van poder orientar la Dirección General de Enseñanza Media, fet que va ser corroborat per la revista *Enseñanza Media* quan va afirmar que els estudis i les conclusions que es van aconseguir en aquestes reunions van tenir el seu reflex en els cuestionarios de matemáticas que es van publicar el 1957 (Redacción, 1960, p. 134).

5. Bibliografia

[1] Arteaga, E.; Sol, J. L. del; Medina, J. F. (2021). «Decálogo de didáctica de la matemática de Puig Adam: un legado para la formación de profesores de matemàtica». *Revista Universidad y Sociedad*, 13(2), 347-356.

[2] Ausejo, E. (2013). «La introducción de la «matemática moderna» en la enseñanza no universitaria en España (1953-1971)». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 16(4), 727-747.

[3] Gattegno, C.; Servais, W.; Castelnuovo, E.; Nicolet, J.L.; Fletcher, T.J.; Motard, L.; Campedelli, L.; Biguenet, A.; Peskett, J.W.; Puig Adam, P. (1967). *El material para la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Aguilar.

[4] Piaget, J.; Beth, E.W.; Dieudonne, J.; Lichnerowicz, A.; Choquet, G.; Gattegno, C. (1971). *La enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Aguilar.

[5] Dólera-Almaida, J.; Carrillo-Gallego, D. (2023a). «Dynamic and Multipurpose Teaching Models at the First International Exhibition of Mathematics Teaching Material». *Education* Sciences, 13(3), 265. https://doi.org/10.3390/educsci13030265.

[6] Dólera-Almaida, J.; Carrillo-Gallego, D. (2023b). «Títulos, índices y prólogos de los libros intuitivos de Rey Pastor y Puig Adam». *HISTEMAT: Revista de História da Educação Matemática*, 9, 1-18.

[7] Dólera-Almaida, J.; Sánchez-Jiménez, E. (2019). «La resolución de la ecuación de primer grado en los textos de Rey Pastor y Puig Adam». *HISTEMAT: Revista de História da Educação Matemática*, 5(3), 18-42.

[8] Dólera-Almaida, J.; Sánchez-Jiménez, E. (2023). «Pedro Puig Adam y el método heurístico en la enseñanza de las matemáticas en España». *El Futuro del Pasado* [acceptat].

[9] Dólera-Almaida, J.; Carrillo-Gallego, D.; Sánchez-Jiménez, E. (2023a). «Puig Adam y el Instituto-Escuela de Madrid». *HME: Historia y Memoria de la Educación* [acceptat].

[10] Dólera-Almaida, J.; Carrillo-Gallego, D.; Sánchez-Jiménez, E. (2023b). «Poliedros en la Educación Secundaria en España (1955-1960): construcción de modelos matemáticos». *Cabás*, 29, 77-92. https://doi.org/10.35072/CABAS.2023.84.72.005.

[11] Enseñanza Media (1956). «Renovación de los métodos didácticos en España: matemáticas». *Enseñanza Media*, 2, 47-49.

[12] Enseñanza Media (1957a). «Las reuniones de estudio del profesorado de enseñanza media: matemáticas». 3, 8-21.

[13] Enseñanza Media (1957b). «Las reuniones de estudio del profesorado de enseñanza media: II matemáticas». 6, 5-15.

[14] Enseñanza Media (1958). «Referencia de dos cursos de didáctica de las matemáticas, celebrados en Madrid y en Valencia». 18—19, 29-39.

[15] Enseñanza Media (1959). «Anuncio sobre el libro *El material didáctico matemático actual*. 37, 210.

[16] Enseñanza Media (1960). «Balance de cuatro años de labor». A: Puig Adam, P. (ed.). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional, 132-136.

[17] González Astudillo, M. T. (2008). «Las ideas sobre la educación matemática de Pedro Puig Adam ¿precursoras de la matemática moderna?» *Quadrante*, XVII(1), 93-108.

[18] Grup Cúbic (2019). «Una mirada matemàtica a l'obra de Josep Estalella i Graells en commemoració del centenari de la publicació del seu llibre «Ciència creativa». *Noubiaix: Revista de la FEEMCAT i la SCM*, 44, 88-94.

[19] Hodgson, B. R.; Rogers, L. F.; Lerman, S.; Lim-Teo, S. K. (2013). «International Organizations in Mathematics Education». A: Clements, M. A. (Ken); Bishop, A. J.; Keitel, C.; Kilpatrick,

J.; Leung, F. (eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Nova York: Springer, 901-947.

[20] Lorente, A. (2011). «El papel de la Inspección de Educación en la extensión de la enseñanza media y en la mejora de los Institutos antes de la LGE de 1970». A: G. Vicente (ed.). *Historia de la Enseñanza Media en Aragón*. Saragossa: Publicaciones de la Institución «Fernando el Católico» (CSIC), 673-692.

[21] Lorenzo, J. A. (1996). «Evolución y problemática de la educación secundaria contemporánea en España». *Revista Complutense de Educación*, 7(2), 51-79.

[22] Lorenzo, J. A. (2003). *Formación del profesorado de enseñanza secundaria en España: pensamiento e instituciones (1936-1970)*. Madrid: Editorial Complutense.

[23] Lozano, J. M. (1956). «La XIX Conferencia Internacional de Instrucción Pública de Ginebra». *Revista de Educación*, 51, 16-19.

[24] Mainer, J. (2009). *La forja de un campo professional: Pedagogía y didáctica de las ciencias sociales en España (1900-1970)*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

[25] Ministerio de Educación Nacional (1953). «Ley de 26 de febrero de 1953 sobre Ordenación de la Enseñanza Media». *Boletín Oficial del Estado*, 58, de 27 de febrer de 1953, 1119-1130.

[26] Puig Adam, P. (1926). «Dos palabras acerca de la pedagogía matemática en la segunda enseñanza». *Revista de Segunda Enseñanza*, 27, 399-401.

[27] Puig Adam, P. (1927). «Klein, el Instituto y la Universidad». *Revista de Segunda Enseñanza*, 32, 223-227.

[28] Puig Adam, P. (1932). «Demostración intuitiva de la regla de la raíz cuadrada». *Matemática Elemental*, 20, 17-20.

[29] Puig Adam, P. (1955a). «La Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la enseñanza matemática. Proyecto de una interesante reunión en Madrid, abril de 1957». *Revista de Educación*, 38, 96.

[30] Puig Adam, P. (1955b). «Decálogo de la didáctica matemática media». *Gaceta Matemática*, 5-6, 130-135.

[31] Puig Adam, P. (1956). *Didáctica matemática eurística*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

[32] Puig Adam, P. (1957). «Un nuevo material para la enseñanza eurística de la geometría del espacio». *Enseñanza Media*, 3, 22-26.

[33] Puig Adam, P. (1958a). «Sobre la formación del profesorado de matemáticas de grado medio». *Boletín de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral*, 1958, 3-12.

[34] Puig Adam, P. (1958b). *El material didáctico matemático actual*. Madrid: Publicaciones de la Revista Enseñanza Media / Ministerio de Educación Nacional.

[35] Puig Adam, P. (1979). «El què podria ésser l'ensenyament de la Matemàtica a l'Institut-Escola». *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques*, 1, 19-30.

[36] Salcedo, M. M. (1956). «El Centro de Orientación Didáctica: lo que es y lo que se propone». *Enseñanza Media*, 1, 5-7.

[37] Utande, M. (1964). *Ley de ordenación de la enseñanza media de 26 de febrero de 1953 anotada y comentada*. Vols. I i II. Madrid: Dirección General de Enseñanza Media.

[38] Viñao, A. (2014). «La educación en el franquismo (1936-1975)». *Educar em Revista*, 51, 19-35.

L'educació (matemàtica) és una arma de construcció massiva[1]

Anton Aubanell
MMACA, Grup Cúbic de la UB
Joan Jareño
Professor jubilat CRAMAT

Resum

Des de fa molt de temps, el nostre professorat de matemàtiques de totes les etapes educatives no universitàries està compromès en un procés de millora: canviant enfocaments generals, ajustant els continguts, enriquint metodologies, atenent perfils d'alumnes diversos... Són una prova d'aquest esforç les nombroses activitats de formació continuada i de millora professional (en modalitats diverses i, en molts casos, amb una gran participació) que es porten a terme, impulsades tant des de l'Administració com des de les associacions que tenim a Catalunya en el camp de l'educació matemàtica i que encapçala la FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques aCatalunya). Entre aquestes activitats destaquen els congressos catalans d'Educació Matemàtica, C^{2}EM, del 2016 (Barcelona) i del 2020 (Reus-Tarragona). En redactar aquestes pàgines s'han tingut en compte les conclusions del primer, els reptes formulats en el segon i les línies d'impuls treballades entre els dos.

Abstract

For a long time, mathematics teachers in all non-university educational stages have been engaged in a process of improvement: changing general approaches, adapting content, enhancing methodologies, addressing different student profiles, etc. Proof of this endeavour is found in the numerous activities and events dedicated to continuing professional development and improvement (in various modalities, and often with great participation) promoted both by the government and by associations in Catalonia specialised in mathematics education, headed by the Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT, Federation of Entities for the Teaching of Mathematics in Catalonia). Amongst those events, two editions of the Catalan Congresses on Mathematical Education, C^{2}EM, held in 2016 (Barcelona) and 2020 (Reus-Tarragona), stand out. In this paper, the conclusions of the former, the challenges outlined in the latter, and the initiatives developed by both are considered.

1. El present escrit està basat en la conferència amb el mateix títol (adaptació matemàtica d'una coneguda frase sovint atribuïda a Marjane Satrapi) que els autors van impartir en el CESIRE-CREAMAT el dia 23 de febrer de 2023 en ocasió de la presentació dels nodes d'impuls matemàtic (NIM).La conferència es pot visionar a https://ja.cat/hmCII.

1. Per què ensenyem matemàtiques? La guineu i l'àliga

A més del creixement personal, un dels objectius generals de l'educació és fer de pont entre l'individu i la cultura de la societat a la qual pertany. I no s'espera que només s'atenguin els aspectes transmissius d'aquesta cultura (fer-nos receptors-coneixedors). L'objectiu va més enllà. Es pretén que el coneixement que s'obtingui sigui reflexiu i, a la vegada, actiu, transformador: que possibiliti el desenvolupament d'una capacitat crítica i l'assoliment d'unes capacitats que permetin fer aportacions enriquidores per al'evolució i el progrés de la pròpia cultura.

Sense entrar en definicions precises, podem entendre la cultura com un conjunt compartit de sabers, de formes de fer i pensar, i de valors. Sovint el terme «cultura»té cognoms: cultura general, cultura científica, cultura artística... Fins i tot de vegades, cognoms molt específics: cultura de sostenibilitat, cultura de gènere... Lamentablement, no és tan freqüent sentir a parlar de *cultura matemàtica*. Malgrat que el terme «enculturació matemàtica» va aparèixer amb una certa força als anys norantadel segle passat, per exemple, ambAlan Bishop,[2] encara s'ha d'estendre més la idea que part de la nostra feina com a docents és facilitar l'entrada de l'alumnatal món de la cultura matemàtica. Si assumim aquest objectiu cultural, assumim també, en conseqüència, el de decidir quins sabers, quines formes de pensar i quins valors volem conrear en el nostre alumnat. No és el lloc de fer una llista exhaustiva, però podem destacar-ne alguns.

Entre els valors relacionats amb la matemàtica podem esmentar, per exemple, l'estima pel repte, la constància en la resolució d'un problema, l'actitud d'interrogació contínua, el rigor, la consciència del pes de l'argumentació lògica (del racionalisme), el reconeixement de la importància de la quantificació i la mesura, el conreu de la mirada matemàtica, l'apreciació de la seva bellesa... Bishop.[3] (1988) afirmava que «una educació matemàtica no és educació si no contribueix gens al desenvolupament de valors». I, anant més enllà, es demanava si «potser aquesta és una diferència crucial entre formació matemàtica i educació matemàtica».

Sobre els sabers matemàtics, hem de fer algunes reflexions prèvies. En primer lloc, usualment parlem de sabers de dos tipus: conceptes i procediments. En l'antiga matemàtica grega, una matemàtica fundacional, segons la manera que entenem les matemàtiques encara avui dia, diferenciaven entre *mathema*, referida a la ciència i el coneixement, i *logística*, de caràcter operatiu. Ens podem preguntar sobre l'equilibri de la presència de totes duesa les nostres aules. Segurament veurem que la *logística*encara ocupa una quantitat excessiva del temps escolar. El matemàtic John Allen Paulos.[4] declarava en una entrevista: «No té cap sentit educar a ningú per competir amb una calculadora de cinc dòlars que, a més, sempre guanyarà». En la nostra defensa de l'educació en la cultura matemàtica hem d'ampliar els sabers més clàssics que acostumen a aparèixer als currículums o llibres de text. Cal considerar també

2. Bishop, Alan J. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona: Paidós.

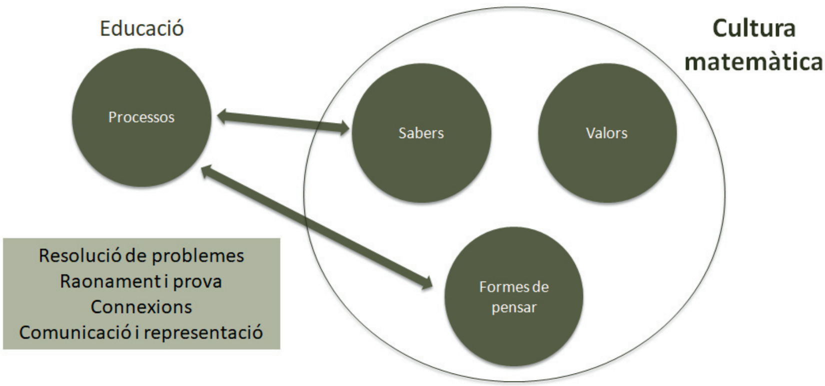
3. Bishop, Alan J. (1988). «Mathematics education in its cultural context».*Educational Studies in Mathematics*,19/2, 179-191.

4. Entrevista al diari *El País* (17/5/2000): https://ja.cat/sUN9I.

altres sabers, com els relatius a la història, la presència de la matemàtica en l'entorn,la seva utilitat, les seves característiques internes (quin paper tenen les definicions, els axiomes, les conjectures, les demostracions, els teoremes...). Després tornarem a parlar sobre aquesta doble visió de la matemàtica.

El tercer conjunt de components d'una cultura que hem destacat és el de les formes de pensar i de fer. Cal educar en el pensament matemàtic. Per exemple, en les estratègies de resolució de problemes, en l'aplicació del raonament lògic (inductiu i deductiu), en la cerca de patrons (demanar-nos: què és igual?, què és diferent?, què es manté?, què varia?, com?), en l'aprenentatge de la modelització de situacions...

Un cop plantejat el *què* cultural que cal incorporar en l'educació matemàtica, toca decidir el *com*. Sembla clar que el com ha de tenir un fort component constructiu per part del mateix alumnat, que ha de partir de la seva acció matemàtica. També tenim clar que la línia didàctica per tractar a l'aula, tant els sabers com el pensament matemàtic, passa per l'atenció als processos: resolució de problemes, raonament i prova, comunicació, representació i establiment de connexions. Aquests processos ens ajudaran tant a incorporar els sabers com a formar en el pensament matemàtic.



No voldríem concloure aquest apartat sense destacar un aspecte de la matemàtica i, en conseqüència de l'educació matemàtica, que ens sembla cabdal. Mogens Niss, matemàtic i especialista en educació danès, afirmava que «Les matemàtiques a l'escola es converteixen no tan sols en capacitat tecnològica a les fàbriques, sinó també en qualitat de les democràcies».[5] En poques paraules s'apunten els dos tipus d'aportació que, fonamentalment, l'educació matemàtica fa a la formació dels ciutadans: donar eines potents que els seran útils per entendre i interactuar amb el món que els envolta i posar al seu abast un formidable cos de coneixements, sòlid i coherent, que educa el raonament i posa de manifest la necessitat de la fonamentació racional de les idees. Es tracta de dos aspectes de la matemàtica que ens conviden a comparar-la amb dos animals: la guineu i l'àliga.

5. Entrevista a «La Contra» de *La Vanguardia*(20/5/2005).

- La guineu coneix bé el seu entorn, sap on trobar aigua i menjar, sap on fer un cau. La matemàtica és guineu quan mostra el seu aspecte més instrumental: la seva aplicació, la seva capacitat per construir models...
- L'àliga s'eleva cap al cel tal vegada pel simple gust de contemplar paisatges amplíssims,tal vegada per augmentar la seva potència i precisió quan es llança sobre una presa. La matemàtica és àliga quan, amb les potents ales de la lògica, s'eleva cap al cel de l'abstracció i desenvolupa idees que potser seran d'enorme potència per resoldre un problema concret.

L'educació matemàtica hauria de buscar oportunitats per anar projectant aquestes dues cares que són indissociables i que Lluís A. Santaló.[6] posava de manifest amb paraules molt belles: «Les seves aplicacions són essencials per a moure'ns en la vida i les seves concepcions alimenten allò més pur de l'esperit».

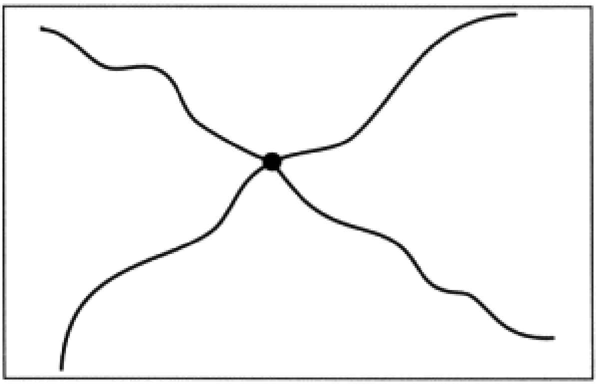
Des d'aquesta perspectiva són benvinguts els projectes STEAM (de l'anglès *science, technology, engineering, arts i mathematics*). Però hauríem d'evitar una certa invisibilitat o un reduccionisme merament instrumental o mecanicista de la matemàtica, de la qual hauríem de tenir cura que també es visualitzessin la bellesa intrínseca, l'estructura global i la connexió de les seves idees, els aspectes abstractes i les bases del seu valuós i potent llenguatge formal. No hauríem d'oblidar l'àliga que pot aportar ales per volar lluny.

2. Els processos

No entrarem, per qüestions d'espai, en l'explicació dels processos. Però ens agradaria posar només un exemple d'un problema per mostrar les seves possibilitats per activar sabers i pensament.

El problema és el següent:[7] «A Moçambic, per delimitar el terreny rectangular que ha d'ocupar una cabana, s'utilitzen quatre cordes de la mateixa longitud lligades per un dels seus extrems».

6. Santaló, Lluís A. (1975). *L'educació matemàtica avui*. Barcelona: Teide.
7. «Delimitant el terreny per fer les cases a Moçambic». *Blog del Calaix +ie*: https://ja.cat/3NNLE.

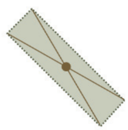


Per tenir un problema no només hem de tenir una situació, sinó, com a mínim, una pregunta. Mirem algunes de les que ens podem fer:

- Com hem d'utilitzar les cordes per obtenir un rectangle?
- Com són els perímetres i les àrees dels diferents rectangles que podem obtenir? Iguals? Diferents? Si és així, com varien? Màxims? Mínims?
- I si augmentem les longituds de les cordes? Com creixen els perímetres i les àrees dels rectangles en comparació amb el cas anterior?
- I si utilitzem cordes de mides diferents? Quins polígons obtindrem?

Els sabers implicats apareixeran o no segons les preguntes investigades, i els processos associats dependran molt de la gestió de l'aula. A la taula següent en recollim alguns.

[*P*: resolució de problemes; *R*: raonament i prova; *Cn*: connexions; *Re*: representació; *Co*: comunicació]

Problema		
Sabers	• Longitud, angles, mesura • Característiques del rectangle • Perímetres i àrees del rectangle • Funcions de diferents tipus (lineals, quadràtiques, trigonomètriques...) • Classificació de quadrilàters	
Processos	*P*	• Estratègies de resolució com particularitzar, generalitzar... • Ús de relacions geomètriques i d'eines trigonomètriques • Comprovació de resultats i valoració de la seva plausibilitat • Formulació de noves preguntes
	R	• Elaboració i comprovació de conjectures • Justificació de les descobertes
	Cn	• Relacions entre perímetres i àrees, diagonals, angles... • Amb disseny i construcció (etnomatemàtica)

	Re	• Experimentació amb materials i/o GeoGebra, *role-play*... • Esquemes • Taules • Gràfiques de funcions
	Co	• Utilització precisa del llenguatge matemàtic per descriure les idees geomètriques que es posen en joc. • Explicació de procediments i conclusions (oralment, per escrit, amb murals...) per compartir i enriquir coneixements i deixar constància de la feina feta.

3. 7,4 accions

Tota acció necessita un actor que la porti a terme. En aquestes propostes diferenciarem principalment tres responsables per fer-les realitat: l'Administració educativa (AE), les universitats (UN) i els mateixosdocents (DO).Cal aclarir, però, que mai entenem que hagin de ser actors independents: és imprescindible una col·laboració i, fins i tot, complicitat entre tots tres.

1. Emmarcar. Cal un marc administratiu que afavoreixi millores en l'educació matemàtica (AE)

Una de les responsabilitats clares de l'Administració educativa és l'elaboració del currículum obligatori. Però cal que aquest estigui d'acord amb els temps en què vivim i estigui actualitzat en les línies confirmades per la recerca educativa i les propostes de la comunitat matemàtica. Ha de ser un currículum dialogat amb interlocutors solvents. A Catalunya ja s'ha actuat en aquesta línia, fins al punt que el currículum català ha estat un dels inspiradors del de la Llei orgànica 3/2020, de 29 de desembre, per la qual es modifica la Llei orgànica 2/2006, de 3 de maig, d'educació (LOMLOE). També és cert que aquests currículums, per raons purament polítiques, no estan tenint prou estabilitat. Entre el 2007 i el 2022 hem vist tres currículums diferents. Encara que podem seguir una línia evolutiva de l'un a l'altre, cal reconèixer també que un currículum no només es publica, sinó que s'ha d'estendre, entendre i mantenir un temps suficient. I tot ha d'anar acompanyat de plans formatius extensius.

Una altra funció administrativa és l'assignació d'un temps escolar específic i suficient a les matemàtiques. Ni el currículum més perfecte té sentit si no se li assignen un temps i uns mitjans que permetin desenvolupar-lo. El temps, en educació, és un bé limitat: les bones didàctiques requereixen temps. I la manca de temps pot comprometre els millors propòsits curriculars. El marc horari actual permet unes modificacions horàries que han arribat a reduir al mínim, en alguns centres, el temps específic de l'àrea, sense estar sempre prou compensat per com es tracten les matemàtiques en l'espai dels treballs de caràcter interdisciplinari.

Per altra banda, sabem, basant-nos en les evidències de la recerca educativa, que és cabdal que els centres tinguin una línia metodològica comuna, compartida. I que aquesta línia es mantingui entre les diferents etapes educatives. Però això no cau del cel: cal donar temps als centres per treballar conjuntament aquestes línies. Una ajuda important a la creació d'aquesta línia metodològica comuna és el reconeixement, a l'educació primària, de persones referents de centre que tinguin, entre les seves responsabilitats, la coordinació dels diferents nivells. A l'educació secundària hi ha especialistes i departaments que donen el marc per a aquesta possible coordinació. Però als centres de primària aquesta figura de l'especialista és actualment inexistent.

En la mateixa línia anterior és important que l'Administració també promogui i doni suport a l'existència de xarxes territorials que impulsin la millora de l'educació matemàtica. En aquest sentit, actualment s'estan fent alguns petits passos, com els NIM (nodes d'impuls matemàtic)organitzats pel CREAMAT, Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques, i els centres de recursos pedagògics (CRP).[8]

2. Formar. Cal cuidar la formació permanent i la formació inicial (DO-AE-UN)

L'ofici d'ensenyar —i, en concret,ensenyar matemàtiques— és complex. Necessàriament, requereix una actitud, una sensibilitat, una voluntat que, en definitiva, és el que ens fa entrar cada dia a l'aula amb una il·lusió renovada. Però això no és suficient.

Cal disposar d'un coneixement matemàtic sòlid: no tan sols dels continguts que cal tractar a classe, sinó de continguts més avançats que ofereixin una perspectiva més àmplia de la matèria, incloent-hi aspectes de cultura matemàtica com, per exemple, els històrics. No disposar d'aquesta base pot provocar que el docent se senti incòmode davant de la classe, que no tingui prou clar cap a on vol avançar i com; que no pugui treure tot el profit docent de les situacions imprevistes que sorgeixen a classe, de la contingència.

Cal tenir un bon coneixement didàctic que ajudi a interactuar positivament amb els alumnes, a entendre els seus processos d'aprenentatge i a disposar d'una àmplia base de recursos de tipus diversos per a l'ensenyament de la matemàtica: materials, tecnològics, comunicatius, de dinàmica de grups... No disposar d'aquest bagatge compromet la possibilitat de fer canvis metodològics profunds, efectius i duradors.

Aquests coneixements s'han d'adquirir, sòlidament, en la formació inicial de mestres i professors i, inexcusablement, s'han d'anar actualitzant al llarg de tota la vida professional.

En la formació inicial crida l'atenció el contrast entre l'èmfasi que es posa en la formació dels mestres d'educació infantil i primària i el que es posa en la formació del professorat d'educaciósecundària:

En la formació inicial de mestres es treballen molt els aspectes pedagògics, però no es dedica prou atenció al coneixement matemàtic a través de l'experiència directa de «fer matemàtiques». En aquest sentit, seria important recuperar l'especialitat de matemàtiques en les facultats d'Educació.

Si ens referim a l'educació secundària, hem de reconèixer que tenim facultats amb mencions, dobles graus, itineraris específics de matemàtiques i altres disciplines, però no n'hi ha cap de matemàtiques i educació. Hi ha joves que desitgen fer de l'educació matemàtica la seva professió i el nostre sistema els necessita. Ens podem permetre que la seva disposició i

8. NIM (Web Creamat): https://ja.cat/v5yUV.

aptitud i la necessitat social no es trobin? Actualment la formació inicial del professorat de secundària passa per un màster que té un cert marge de millora (quant a la durada, el model i l'extensió de les pràctiques). Tant de bo, algun dia, en les nostres universitats, hi hagi un grau específic d'educació matemàtica per formar professorat de secundària, amb una sòlida preparació matemàtica i didàctica. I tant de bo hi hagi un procediment d'incorporació a la professió docent cada vegada amb més acompanyament i suport.

Totes les professions, i especialment les que actuen en camps d'evolució ràpida,com ho és l'educació, requereixen un procés continuat de formació que és garantia de qualitat i motor d'innovació. Des de l'Administració educativa cal promoure i acompanyar els processos de millora a través de models de formació permanent propers a l'aula, territorialitzats, enllaçats en xarxa... En particular, els canvis substancials en el currículum haurien d'anar acompanyats d'una formació específica, prescriptiva i generalitzada.

3. Escoltar per aprendre'n. Fent xarxa guanyem qualitat, bon fer, ofici (DO-AE-UN)

Cada docent ha de cercar els seus referents per anar trobant, dins de la línia general del centre, el seu propiestil: referents viscuts com a alumne, companys de feina docent, adoptats a partir de lectures, formacions...

Però no estem sols. Hem d'assumir una cultura de compartir per créixer professionalment i contribuir al creixement dels altres. Cal donar valor al fet de crear xarxa i al fibrat associacionista. Aquest fibrat, en l'àmbit de les matemàtiques, és molt ric i no té parangó amb el d'altres àmbits educatius.

En un altre camp, l'Administració també ha d'escoltar. I pot fer-ho tenintla FEEMCAT, per exemple i entre altres, com un dels interlocutors més potents. Per aconseguir-ho també hauria de ser objectiu de la FEEMCAT, a més del seu propi creixement pel que fa asocis i accions, adreçar-se a l'Administració amb tota la força possible i des de l'autoritat que donen la quantitat de persones associades, l'abast territorial i la diversitat, la repercussió i qualitat del seu treball. També és important que l'Administració doni suport a aquestes accions (de la FEEM-

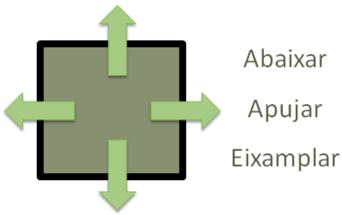
CAT o d'altres grups, associacions o institucions), tant a les que ajudin a escoltar-se entre docents (jornades, congressos...), com a les de dinamització de l'alumnat (Proves Cangur, Fem Matemàtiques, Estalmat, Anem x + Matemàtiques, MMACA i un llarg etcètera).

I encara ens agradaria afegir un altre aspecte en aquest punt. Cal que els resultats de la recerca educativa arribin als centres. Els ponts que connecten recerca i pràctica són encara força escassos i febles. Això seria una millora perals dos camps, perquè un pont és bidireccional i així es retroalimentarien. La universitat té un paper important en aquest terreny. L'escola vol contribuir a construir una societat del coneixement, però a vegades té dificultats a l'hora d'usar el coneixement per a la seva pròpia millora.

4. Enriquir. Processos i millora d'activitats (DO)

És important ensenyar matemàtiques a través d'activitats riques, de situacions d'aprenentatge rellevants i matemàticament significatives. Hi ha criteris que ens poden ajudar a enriquir activitats i que hauríem de tenir sempre presents:

1. Intentar que les activitats que portem a classe siguin de terra baix (fàcils d'accedir-hi, no excloents), de sostre alt (permeten avançar molt, no limiten) i d'espais amples (per permetre el progrés des de diferents estils d'aprenentatge). Haurem de conjugar més i ressignificar els verbs *abaixar*, *apujar* i *eixamplar*.



2. Donar als processos la importància que tenen en l'accés als sabers i al pensament matemàtic. Orienten metodològicament són palanques d'enriquiment d'activitats:

   - La resolució de problemes ha d'estar al centre de l'educació matemàtica. No es tracta tan sols d'ensenyar per resoldre problemes i d'ensenyar sobre la resolució de problemes, sinó que cal ensenyar a través de la resolució de problemes rics, matemàticament rellevants, ben contextualitzats... Els bons problemes, ben treballats, són grans constructors de coneixement matemàtic!

   - El raonament hauria d'estar sempre present en l'educació matemàtica transmetent implícitament o explícitament el fet que és el que dona solidesa al cos de les matemàtiques. Els «...per què?»i els «i si...?» són excel·lents invitacions a raonar.

   - Les connexions són un dels aspectes més seductors de la matemàtica en dos sentits:

     – Les connexions internes trenquen les fronteres entre els blocs temàtics clàssics perquè mostren la coherència interna, la unitat del coneixement matemàtic. Cada connexió és una oportunitat didàctica, especialment si és amb elements geomètrics que ofereixen possibilitats de visualització.

- Les connexions externes ens ajuden a veure la matemàtica que hi ha en el que ens envolta, a través de la seva presència o de la seva aplicació. Són oportunitats per apropar-nos als models matemàtics, per discutir sobre l'exactitud i l'aproximació... perquè ja no sigui necessària la pregunta «...i això per a què serveix?».

- La comunicació i la representació ens conviden a donar importància a l'expressió de les idees amb paraules, amb símbols, amb gràfics, amb taules, amb esquemes... No tan sols per compartir idees matemàtiques amb altres persones (compartint construïm coneixement), sinó també per millorar la mateixa comprensió d'aquestes idees (ordenant conceptes i descobrint relacions).

5. Escollir. Cal triar i gestionar bé les activitats (DO-AE)

En un punt anterior hem parlat de la necessitat d'escoltar i buscar els nostres referents. En aquest apartat hi afegim la de conèixer i explorar els bancs d'activitats. Actualment tenim la sort, gràcies a les noves tecnologies de la informació, de poder accedir fàcilment a una gran quantitat de propostes educatives. Només per esmentar algunes fonts,tenim webs com les de NRICH, CREAMAT, Banc de Recursos del Fem Matemàtiques, ARC, PuntMat... Però cal tenir criteris d'elecció: personals i generals. Per exemple, la riquesa de l'activitat. En el document de la Comissió d'Impuls de les Conclusions del C^{2}EM sobre «activitats de referència» (2018) es planteja la llista de criteris següent, que ens pot ser orientadora sobre com ha de ser l'activitat: accessible per a l'alumnat, significativa, matemàticament rellevant, activadora del pensament matemàtic, extensiva, replicable,objecte de múltiples enfocaments i representacions, i fomentadora de la col·laboració i la discussió en un marc de reflexió.

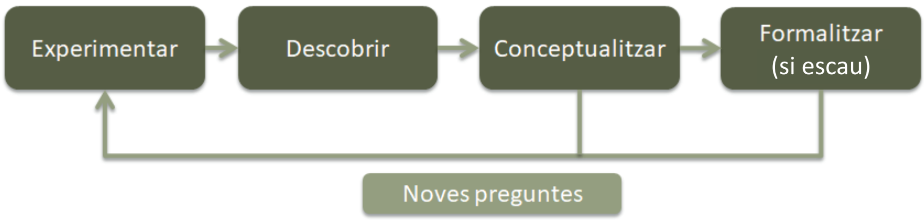
En aquest epígraf també voldríem destacar que, en les nostres tries, hem d'evitar donar una visió reduccionista de les matemàtiques. Per exemple, si hem d'exercitar alguna pràctica, no cal limitar-se a tasques purament reproductives, orientades a l'automatització, sinó que podem trobar variants que, a més, convidin a fer alguna mena de reflexió o descoberta paral·lela, el que es coneix com a «pràctiques productives». Per exemple, no és el mateix proposar una llista de restes que demanar quantes restes diferents es poden fer a partir de quatre números concrets, operació que pot portar a la formulació de tot un conjunt de preguntes noves (quin és el resultat més gran, quin és el més petit, quants resultats diferents hi ha...). Aquesta visió reduccionista pot aparèixer «perillosament»en un altre terreny:en molts treballs de caràcter interdisciplinari. Si no s'aprenen matemàtiques noves i només ens limitem a fer càlculs reproductius, més o menys complexos, o gràfics estadístics dels més usuals, només estem potenciant una visió empobrida de la instrumentalitat de les matemàtiques.

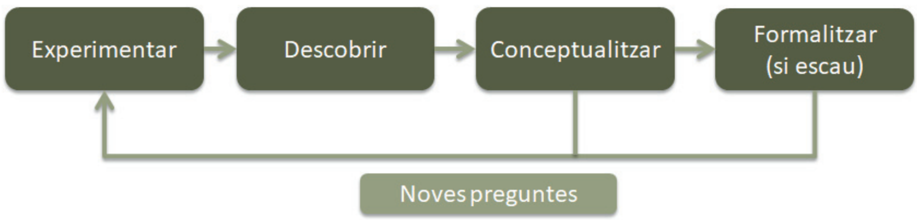
Però quan parlem d'escollir, no ens referim només a la tria d'activitats. Hi ha tot un conjunt de decisions per prendre referides a com farem les activitats a l'aula: quins materials utilitzarem?,què farem individualment?,què farem en grup?,com ho farem?... A més d'aquests aspectes, és també bo preveure com seran les nostres preguntes i intervencions, com intentarem guiar el desenvolupament de l'activitat cap als objectius que ens hem marcat. També sabem que sorgiran contingències i que haurem de parar atenció en les que puguin ser interessants. Fins i tot caldrà recollir-les per incorporar-les al nostre llistat de possibles intervencions futures si repetim l'activitat. De fet, es tracta d'anar construint de mica en mica el nostre propi banc de recursos,de recollir el que sigui educativament interessant i proper a la nostra manera de fer.

Ens acabem de donar molta feina com a docents. Quin acompanyament ens pot donar l'Administració? La creació i difusió de bancs de recursos, facilitar l'accés a activitats diversificadament modelitzadores, la creació de xarxes per compartir materials entre iguals... També en té, de feina!

6. Cal experimentar (DO)

Estem convençuts que l'educació matemàtica ha de tenir un fort component d'experimentació (amb materials manipulables, amb *role-plays*, amb jocs, amb aplicacions de geometria dinàmica com el GeoGebra, amb fulls de càlcul, amb entorns de programació com Snap! o Scratch, fins i tot amb paper i llapis...). Henri Poincaré afirmava:«Només hi ha dos mètodes per a ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors».[9] L'experiència no s'oposa a l'abstracció, sinó que pot ser un dels camins més directes per arribar-hi. El físic i filòsof austríac Ernst Mach deia que «la manera més eficaç de pertorbar el procés d'abstracció consisteix a abraçar-lo abans d'hora».[10] Les activitats d'experimentació a classe de matemàtiques no són simples anècdotes, ni trivialitzen; al contrari, permeten treballar continguts avançats conjecturant, explorant, descobrint, conceptualitzant (posant paraules als processos realitzats o a les idees descobertes) i, si cal, demostrant i formalitzant.





Les experiències poden respondre a diverses intencions didàctiques. Per exemple, són útils per:

9. Citat per Arnold, Vladimir I. (1998). «Models matemàtics durs i models matemàtics tous». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 13/1,7-26.

10. Citat per Sigmund, Karl (2023). *El sueño del círculo de Viena*. Barcelona: Shackleton Books.

- **Motivar**: la corda de dotze nusos que s'emprava a l'antic Egipte per construir angles rectes.
- **Simular**: la màquina de Galton per simular la distribució binomial i la campana de Gauss.
- **Construir**: fer un triangle isòsceles plegant paper o traçar còniques amb fils i regles.
- **Demostrar**: justificar la paritat dels resultats de les sumes de parells i senars amb cubets encaixables.
- **Mostrar**: observar la coincidència de la suma dels angles de triangles retallant els angles de diferents triangles fets en paper i posant-los adjacents.
- **Plantejar i resoldre problemes**: establir patrons en el nombre de cubets encaixables que formen una successió de figures policúbiques construïdes amb un determinat criteri.
- **Visualitzar**: les mediatrius en diagrames de Voronoi aproximats mitjançant Lacasitos i aigua.
- **Aplicar**: utilitzar el teorema de Thales per entendre la reducció que es produeix en dibuixar el contorn d'una cara sobre un mirall.

La importància de l'experimentació en l'ensenyament de les matemàtiques es recollia en el repte 5 del C^{2}EM 2020:«Potenciarem la creació de laboratoris de matemàtiques als nostres centres considerant-los un element important en la creació d'ambients propicis per a l'experimentació».

7. Respectar. Tothom pot fer matemàtiques (DO)

Aquest terme, «respectar», referit a l'alumnat, va molt més enllà del respecte a la persona, a la seva forma de ser i a les seves creences. També va més enllà del respecte al seu ritme d'aprenentatge, que és evident que no és el mateix per a tots els alumnes. Una de les mostres més importants de respecte enversells és la confiança en les seves possibilitats. Sovint, sense adonar-nos-en, som els mateixos docents els que posem els límits del que poden fer i del que no. Subestimem les seves capacitats. Un exemple flagrant és que sovint, quan un grup d'alumnes té dificultats, se'ns suggereix (normalment des d'algun estament extern) un enfocament adreçat al reforç exclusiu de les mecàniques, prescindint de la comprensió. Ens diuen que l'important és el saber fer, no el saber. És això un exemple de respecte als alumnes? És cabdal ajudar-losa anar agafant confiança i consciència de les pròpies capacitats matemàtiques. Tothom pot, en un grau o un altre, fer matemàtica. La tria i la gestió de les activitats (acció 5) té una gran importància en l'assoliment d'aquesta autoconfiança. Però entre els aspectes de gestió n'hi ha un que, per la seva importància, mereix una atenció especial: el tractament de l'error... i de l'èxit!

a) Gestionar constructivament l'error

En una situació d'aprenentatge, l'error ha de ser un material de construcció, cal treure-li el caràcter devaluador que sol acompanyar-lo. Adaptant una idea d'Oskar Cymerman, podríem dir: «Esperem els errors, acollim els errors, respectem els errors, analitzem els errors, corregim els errors i aprenguem dels errors».[11] Si només ens dediquem a encadenar constatacions

11. Adaptat d'un pòster d'Oskar Cymerman: https://ja.cat/PFZeL.

negatives d'errors, hi haurà alumnes que entraran en una espiral de desconfiança respecte de les seves possibilitats matemàtiques i acabaran dient la massa coneguda frase «jo no serveixo per a les matemàtiques». Com a societat, no ens ho podem permetre. Suggerim posar atenció en els mots: potser hauríem d'emprar amb més cura la paraula «error» i de donar més joc a la paraula «errada». N'hi ha prou amb consultar el diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans per veure que la diferència és evident:

> **Error**
> **1** *1* Acció d'allunyar-se del ver, del just.[...]
> **1** *2* Concepte, opinió, doctrina, que no està conforme a la veritat. [...]
> **2** *1* Diferència entre un valor estimat d'una quantitat o d'una expressió matemàtica i el seu valor exacte.
> **Errada**
> Acció d'errar o equivocar-se; l'efecte. [...]

b) Ser proveïdors d'èxits

Res no és més motivador que l'èxit, per petit que sigui. En el desè punt del seu decàleg (1955),[12] Pere Puig Adam escrivia:«X. Procurar a qualsevol alumne èxits que evitin el seu desànim».Més de seixanta-cinc anys després,en diverses ocasions hem sentit a dira Charlie Gilderdale (Universitat de Cambridge) que «en una classe de matemàtiques hi ha molts camins per a què els alumnes tinguin oportunitats d'èxit». Estem convençuts que mestres i professors hem de ser proveïdors d'èxits per als nostres alumnes, amb reptes progressius ben ajustats, perquè requereixen cert esforç, però que siguin assolibles. És el millor camí per anar aportant confiança sobre les possibilitats de cadascú en l'àmbit de les matemàtiques i per aconseguir una major implicació en el seu aprenentatge.

7,4. Sumar (DO-AE)

Potser sorprèn trobar un decimal encapçalant el número d'aquesta acció. És una petita llicència que ens permetem per indicar que l'acció no està només en mans dels nostres actors principals fins ara: docents, Administració i universitat. Ara necessitem que s'hi afegeixin altres estaments del que podríem anomenar la societat general i que, amb ànim de concretar, podem particularitzar en les famílies, els mitjans de comunicació i la comunitat matemàtica (més enllà de l'educativa). Cal canviar no només la imatge social que es té de les matemàtiques, sinó la imatge tradicional del que és el seu ensenyament-aprenentatge: el *què* i el *com*. En aquesta línia, també des dels centres tenim un grau de responsabilitat en el canvi sobre aquesta percepció encarcarada. Podem ajudar a visibilitzar que les matemàtiques són molt més que «mecanismes misteriosos només aptes per a una selecta part de la població», fent divulgació amb petites exposicions, presentacions o vídeos del treball de l'alumnat. Les revistes o blogs dels centres poden ser també un bon vehicle de popularització. Per altra banda, es pot explicar a les famílies el projecte educatiu matemàtic del centre per a l'àmbit de les matemàtiques. Potser així podrem esborrar el record personal que pares i mares puguin tenir dels models d'ensenyament més tradicionals d'aquesta àrea.

12. Puig Adam, P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

Quant a l'Administració, hi ha un deure pendent clar: crear un espai web d'informació i suport a les famílies, basat en els enfocaments i les maneres de fer actuals en educació matemàtica.

4. Cloenda

En aquest tancament de l'article ens agradaria recordar les paraules de l'enyorat periodista Joan Barril (1952-2014):[13]

> [...] **és curiosa la normalitat amb què s'admet que els nens de totes les edats manifestin el bloqueig mental a les matemàtiques** [...]. **Jo també era d'aquests**. I l'edat m'ha portat a creure que els números són menys traïdors que les paraules. M'alimento d'aquestes però són ells els que em tranquil·litzen. Les matemàtiques ens permeten la comprensió d'allò que els sentits ni sospiten. Les matemàtiques són el verdader idioma universal que salta continents i que unifica el saber de segles [...]. **Les matemàtiques són l'eina que ens permet veure el que ni tan sols intuïm. Es mereixen un plus de prestigi. La vergonya i el dolor de l'analfabet van més enllà de la lectura.**

Ens engresquem[14] a continuar amb força el camí de millora de la nostra educació matemàtica? Tothom, des de la seva escola, des de la seva aula, des de la seva responsabilitat, des de la seva família, pot aportar-hi el seu esforç i la seva il·lusió. Hi ha una frase, atribuïda a Eduardo Galeano, amb la qual ens podem identificar:«Mucha gente pequeña, en lugares pequeños, haciendo cosas pequeñas, puede cambiar el mundo».

ens engresquem?

$$e \times e = e^2 \approx 7{,}4$$

13. Barril, Joan, «La gran eina». *La Vanguardia* (17/9/2004).

14. Encara que no sempre és bo revelar els petits jocs amagats en un text, ens agradaria explicar aquest. Mentre preparàvem la xerrada en què es basa l'article, Laura Morera ens va fer observar que e2˜7,4, el nostre nombre d'accions. La conferència acabava amb una petita animació on les dues lletres e que encapçalaven les paraules «Ens engresquem?» es transformaven en la igualtat esmentada.

Cap a on va l'ensenyament de les matemàtiques?

Jordi Deulofeu Piquet
Professor honorari de la Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Resum

Aquest article, des d'una mirada positiva del futur de l'educació matemàtica, reflexiona sobre l'estat de les propostes actuals centrades en l'aprenentatge competencial i les situacions d'aprenentatge significatives a l'aula. La formació del professorat de matemàtiques és clau per millorar el sistema educatiu. Tot i que s'han fet progressos, hi ha un marge per millorar el model actual, per exemple, amb més presència de pràctiques a l'aula en el Màster de Formació del professorat o amb la formació continuada. Part dels reptes rellevants els trobem recollits en https://ja.cat/ReptesC2EM. Cal que dissenyar una agenda per poder treballar plegats i el Congrés Català d'Educació Matemàtica (C2EM) és un bon espai per fer-ho.

Abstract

Adopting a positive viewpoint on the future of mathematical education, this article reflects on the state of current proposals focused on competency-based learning and meaningful learning situations in the classroom. The training of mathematics teachers is key to improving the educational system. Although progress has been made, there is room for improvement in the current model. For instance, more classroom practice in the master's degree in Teacher Training, and continuing professional development are recommended. Outlines of some of the important challenges can be found at https://ja.cat/ReptesC2EM. It is necessary to design an agenda around which we can work together, and the Catalan Congress on Mathematical Education (C2EM) is the ideal place to do so.

1. Introducció

Vull començar agraint l'oportunitat que els editors del *NouBiaix* m'han ofert de participar en aquest número tan especial de la revista. Arribar al número 50 és una fita important i un bon moment per reflexionar sobre tots els temes relacionats amb l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, així com sobre tots els altres aspectes dels quals s'ocupa la didàctica de les matemàtiques. Així doncs, aprofitant al mateix temps que quan escric aquest article fa molt poc que m'he jubilat —un altre bon motiu per reflexionar sobre el que han estat els anys passats i intentar fer petites projeccions sobre els que vindran en un futur no llunyà—, intentaré ser fidel a l'encàrrec de l'equip editorial i exposaré un conjunt de reflexions sobre com veig la situació de l'ensenyament de les matemàtiques en aquests moments i quins crec que són alguns dels reptes més rellevants de cara a un futur a curt i mitjà termini.

Sense avançar encara les línies de les meves reflexions, sí que vull dir que intentaré en tot moment no caure en el tòpic sovint molt arrelat segons el qual en els temps passats les coses anaven millor que ara i el futur ens presentarà situacions encara pitjors de les actuals. Al contrari, sense negar canvis, dificultats i entrebancs, m'agradaria que de les meves paraules es desprengués una visió positiva d'un futur amb oportunitats importants, sempre, això sí, que les coses es facin de manera raonable i defugint gremialismes que moltes vegades porten a confrontacions estèrils.

L'ensenyament dels infants i dels joves —i, en particular, l'aprenentatge de les matemàtiques— és tan important, tant per a ells com per a tot el país, que requereix que tots els que ens hi dediquem confrontem les nostres idees amb un objectiu comú: millorar la formació de tots els nois i les noies per tal que quan siguin adults puguin esdevenir ciutadans de ple dret. Aquesta és, en última instància, la finalitat de les reflexions que venen a continuació.

Hi ha tants temes interessants que afecten l'aprenentatge de les matemàtiques i, més en general, l'educació matemàtica, la majoria d'ells molt relacionats, que es fa difícil trobar un fil que permeti exposar-los de manera ordenada. En la primera part d'aquest article em referiré a l'evolució del currículum en els darrers anys, com a fil conductor per identificar el principals reptes de l'educació matemàtica avui i en el futur immediat. M'estendré parlant de les situacions d'aprenentatge i caracteritzaré les activitats competencialment riques, un punt que em sembla clau per avançar cap a un vertader aprenentatge competencial (Niss i Højgaard, 2011, 2019). Seguiré parlant del professorat, en particular de la seva formació, tant la inicial com la permanent —aspecte que considero crucial per a una millora general—, i proposaré models de formació que em semblen adequats per abordar les problemàtiques més importants, entre les quals destaco la gestió de l'aula. Per concloure, em referiré al congrés català d'educació matemàtica que se celebrarà a Lleida el 2025 i, en concret, a l'agenda que en forma de reptes es va presentar a les conclusions del C^{2}EM 2021 de Tarragona-Reus.

2. Les matemàtiques escolars, avui

Parlar de les matemàtiques escolars és difícil perquè hi ha molts nivells, molts centres i moltes realitats, de manera que generalitzar pot ser agosarat perquè les diferències entre els uns i els altres són notables. Un primer referent, encara que teòric però fàcilment objectivable, el constitueixen les tendències i línies mestres dels currículums publicats per les administracions educatives. D'entrada, una mirada a l'evolució dels currículums de matemàtiques dels darrers vint anys, i en particular als de casa nostra, ens mostra un camí cada vegada més clar cap a un plantejament competencial de l'aprenentatge de les diferents disciplines, en particular de les matemàtiques, en què els continguts (anomenats sabers en els darrers documents del nostre país), tot i seguir sent rellevants, estan al servei de les competències. El que l'alumnat ha d'aprendre no són conceptes i tècniques, sinó la seva utilització en contextos diversos per resoldre problemes, raonar, modelitzar o representar i comunicar. També s'observa l'inici d'una tendència a considerar àrees més generals que les disciplines, com ara l'àrea STEM,[1] i a relacionar les competències específiques de les matèries amb unes competències més generals pròpies de les àrees.

Respecte a aquesta temàtica, voldria fer una primera consideració en relació amb una frase que sovint he sentit i que ve a dir una cosa així com «ara els continguts no són importants». Cal repetir que difícilment es pot fer un treball de desenvolupament dels processos de les matemàtiques, com ara resoldre problemes, raonar o comunicar, sense un coneixement dels conceptes matemàtics clau. La qüestió que al meu entendre hauria de centrar el debat és: com s'introdueixen aquests conceptes clau i, en particular, com es consideren les dificultats cognitives inherents a l'aprenentatge dels conceptes i com es fa un treball que permeti que els alumnes els reconstrueixin sempre que sigui possible i se'ls apropiïn per tal de poder-los aplicar realment a situacions noves (Arcavi, 1999). Perquè, si creiem que «ensenyant» les idees clau a través d'exposicions del professorat, com s'ha fet sempre, aconseguirem que l'alumnat els aprengui i sobretot els sàpiga aplicar, serà difícil avançar en l'aprenentatge tant conceptual com competencial de les matemàtiques.

Sorgeix, doncs, una idea anomenada situació d'aprenentatge que, tot i no ser nova, es planteja de manera explícita en el darrer currículum i que, al meu entendre, es troba en el focus de la problemàtica actual i, previsiblement, del futur a curt —i potser mitjà— termini. Sense entrar a definir amb precisió què s'entén per situació d'aprenentatge, sí que en vull destacar dues característiques: el context on es formula la situació i el repte que hauria de provocar en l'aprenent, és a dir, l'interès per abordar-la i treballar-hi. Dit d'una altra manera, el nivell de significació de la situació, tant per a qui aprèn com per a allò que volem que aprengui. Altre condició més estricte en la definició (tot i ser interessants i que és important tenir-les en compte sempre que sigui possible), com ara que el context de la situació sigui socialment rellevant, no em sembla que hagin de formar part de la idea clau, que és aconseguir un aprenentatge significatiu.

Un exemple potser aclarirà el que intento dir: un context de joc (d'estratègia o d'atzar), encara que sigui un joc abstracte, pot generar una bona situació per a l'aprenentatge matemàtic a l'aula? La meva resposta és afirmativa si en el seu plantejament es propicia el desenvolupament de competències: en aquest cas, la presa de decisions, la resolució de problemes, l'argumentació sobre la validesa d'allò realitzat i/o la comunicació dels resultats obtinguts (Navarro i Deulofeu, 2016). També si s'afavoreix un ambient a l'aula on constantment es formulen preguntes (el famós «i si» tan important en l'aprenentatge de les matemàtiques) i on, a més, sorgeixen de manera natural conceptes matemàtics curriculars (numèrics, geomètrics, probabilístics o funcionals). És a dir, si a classe hi ha un clima d'experimentació, interrogació, discussió i argumentació, allò que en diem un ambient de resolució de problemes.

Si es dona tot això i es parteix de l'experimentació —en aquest cas, de la pràctica del joc amb sentit—, i, a més, s'aconsegueix que l'alumnat vulgui no només practicar el joc, sinó plantejar-se i intentar respondre les preguntes que formulem sobre ell, en un ambient on la col·laboració contraresta adequadament els aspectes competitius propis dels jocs, ens trobarem, al meu entendre, davant d'una situació d'aprenentatge real. Si, en canvi, el context

1. STEM, de l'anglès *science, technology, engineering and mathematics*, de la qual existeix la forma catalana corresponent, CTEM, de ciència, tecnologia, enginyeria i matemàtiques.

i la mateixa situació són forçats i es formulen com una «excusa» per treballar determinats procediments, i no generen repte, tot i la seva possible rellevància, no estarem davant d'una «bona» situació d'aprenentatge. No cal dir, per tancar l'exemple, que moltes de les matemàtiques que hi ha darrere dels jocs són de gran rellevància i constitueixen models que s'utilitzen per analitzar situacions socialment importants en el marc de la teoria de jocs.

Així doncs, si l'objectiu principal de l'aprenentatge de les matemàtiques és desenvolupar processos i assolir nivells de competència, una manera d'apropar-se a la creació de situacions d'aprenentatge és pensar en activitats competencialment riques o, millor encara, en l'enriquiment d'activitats ja conegudes per fer-les competencialment interessants. Una visió àmplia d'aquest enriquiment la podeu trobar en l'article «Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemas» (Deulofeu i Vila, 2021), on destacàvem els quatre pilars que cal tenir en compte: *la proposta base* —l'enunciat que presentem a l'alumnat—, *la planificació* —el conjunt de decisions prèvies del professorat—, *l'alumnat* —amb les seves creences, idees prèvies, capacitats i emocions— i *la gestió de l'aula* —tot el que el professorat farà a l'aula quan es dugui a terme l'activitat.

Així mateix i pensant en les activitats d'aprenentatge de qualsevol nivell de l'escolaritat obligatòria, dèiem que una activitat rica ha de tenir les característiques següents: que sigui accessible per tothom (terra baix i sostre alt) i significativa per al resolutor i per a les matemàtiques que volem que aprengui, que admeti múltiples enfocaments i també diferents representacions, que sigui matemàticament rellevant, que activi el pensament matemàtic, que fomenti la col·laboració i la discussió en un marc de reflexió i, finalment, que sigui extensible. Detallem una mica més aquestes set característiques:

- **Accessible:** inclou un enunciat de la tasca comprensible, proporciona oportunitats d'èxit inicial per a la majoria, possibilita diversos nivells d'abordatge i de resolució i permet treballar a ritmes diferents (terra baix i sostre alt).
- **Significativa:** incita a la curiositat (ja sigui pel context, ja sigui per la formulació de la tasca o per les dinàmiques generades pel docent al voltant de l'activitat) i manté l'interès pel repte, ja que, tot i ser abordable, el que hem de fer per arribar a la resolució no és evident d'entrada per a l'alumnat.
- **Varietat d'enfocaments:** és una tasca amb una certa obertura, no tancada en tots els sentits i que admet representacions, camins d'abordatge i/o resolucions diverses. Les situacions tancades i estandarditzades que es resolen aplicant un procediment únic no esdevenen situacions riques, a menys que el docent faci una gestió que permeti obrir-les i generar discussió al voltant de la seva resolució.
- **Matemàticament rellevant:** implica conceptesclau, porta a construir continguts, promou l'aplicació de continguts a contextos nous, necessita fer ús de raonaments matemàtics (inductius i/o deductius), i la seva resolució requereix l'ús de connexions intramatemàtiques o entre les matemàtiques i el món.
- **Activa el pensament matemàtic**: potencia el cicle format per l'experimentació, l'estudi de casos particulars, la realització de conjectures, la verificació de les conjectures i, si escau, la generalització, potencia la creativitat matemàtica (flexibilitat, intuïció, originalitat, organització...) i promou la planificació i la presa de decisions amb sentit crític.

- **Fomenta la col·laboració, la reflexió i la discussió:** provoca la conversa matemàtica a l'aula i la confrontació d'idees entre iguals, promou l'explicació i la justificació del procés, així com l'anàlisi i la recerca d'altres resolucions.
- **Extensible:** tant permet ampliar la mateixa activitat (possibilitat de formular noves preguntes, d'estendre la tasca, de generalitzar, millorar i optimitzar el procés), com crear activitats similars a partir d'aquesta.

Per tot el que s'ha exposat, entenc que un tema de màxima rellevància en aquests moments i en el futur immediat és un treball intens i extens al voltant de la creació de situacions d'aprenentatge i d'activitats competencialment riques en tots els nivells educatius. Aquest treball no s'ha de limitar a fer propostes per portar a l'aula, sinó que s'ha d'acompanyar d'exemples reals sobre la gestió d'aquestes activitats, en què s'analitzi i es discuteixi el que passa a les aules, per tal de poder fer propostes de millora tant de les activitats com de la seva gestió (Calvo *et al.*, 2016). Aquest darrer aspecte és clau: una activitat el plantejament de la qual potser no és gaire rellevant, pot esdevenir-ho si se'n fa una gestió que permeti crear un ambient de resolució de problemes a l'aula (Abrantes, 1996; Deulofeu i de la Fuente, 2022). Cal també que fem un esforç per crear instàncies que afavoreixin compartir aquest treball entre tots i arribar a un nombre més important de docents que no pas el que s'ha aconseguit fins ara.

3. La formació del professorat de matemàtiques

En qualsevol procés d'ensenyament-aprenentatge el paper del professorat, entès essencialment com un mediador entre l'alumnat i allò que volem que aquest aprengui, és molt rellevant i, per tant, la seva formació, tant la inicial com la continuada, és un element clau, ja que un bon sistema de formació en tots els nivells és, al meu entendre, un indicador rellevant de la qualitat d'un sistema educatiu. Així doncs, considero que treballar per millorar la formació ha de ser una tasca prioritària.

En l'àmbit de la formació inicial de secundària es va fer un pas important quan el 2009 es va instaurar el màster de Formació del Professorat en substitució del vell i poc útil certificat d'aptitud pedagògica (CAP). Al nostre país, el curs 2013-2014 es va iniciar un màster de sistema, interuniversitari, de l'especialitat de matemàtiques, coordinat per la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) i amb la participació de cinc universitats: UAB, Universitat de Barcelona, Universitat Oberta de Catalunya, Universitat Politècnica de Catalunya i Universitat Pompeu Fabra. Els inicis foren complexos per tal d'encaixar les diferències entre les dinàmiques de les diferents universitats participants, però a poc a poc ens vam anar coneixent i vam anar compartint objectius, de manera que avui, en la seva onzena edició, el màster està consolidat.

Tanmateix, considero que una formació inicial professionalitzadora com la que tenim, tot i els avenços que significa respecte a etapes anteriors, és insuficient per poder-se considerar d'alta qualitat. Personalment, soc partidari d'un model com el que tenen molts països d'Europa, amb un grau de tres anys de la disciplina i un màster de dos cursos amb una major presència del pràcticum, autèntic eix del màster des del punt de vista temporal, de manera que el segon curs del màster podria centrar-se en unes pràctiques acompanyades, amb activitats de llarga durada, tant d'observació com d'intervenció, i un treball de fi de màster (TFM) de reflexió i anàlisi sobre la intervenció duta a terme. Tampoc no s'ha de descartar el model simultani: un grau específic que combini el coneixement de la disciplina amb l'aprenentatge de la professió de docent. En qualsevol cas, atès el desequilibri dels darrers anys entre oferta i demanda que ens està portant a una situació preocupant de falta de professorat, cal pensar en les diferents possibilitats sense, al meu entendre, descartar-ne cap.

No sembla, però, que les coses hagin d'anar, en un futur immediat, pel camí que he assenyalat. Més aviat una suposada «millora» sembla que va associada a la variable de la presencialitat de la formació, cosa que em sembla preocupant, especialment pel que fa a la formació inicial. En els darrers anys s'han començat a implementar formacions no presencials que al meu entendre no són les més adequades per al desenvolupament de moltes de les competències professionals dels docents. No vull dir, però, que no pugui haver-hi aspectes que es puguin treballar de manera efectiva en un marc virtual i, per tant, que puguin funcionar bé. D'altra banda, cal també treballar àmpliament l'ús dels mitjans tecnològics per tal de garantir la competència digital del professorat.

Tanmateix, el component humà i social de les tasques d'ensenyar i aprendre , juntament amb la importància de la interacció presencial entre ensenyants i aprenents, em semblen fonamentals i insubstituïbles, per la qual cosa crec que és necessària una presencialitat que vagi força més enllà del pràcticum. En definitiva, no considero que la millor solució a la manca de professorat de matemàtiques sigui oferir un nombre elevat de places en màsters amb tota la formació virtual llevat del pràcticum.

La problemàtica del professorat d'infantil i primària és diferent i, per tant, les possibles línies de millora també. Se sap que tenim una formació de grau professionalitzadora establerta des de fa temps que, tanmateix, no garanteix els coneixements de la disciplina necessaris per a un bon ensenyament de les matemàtiques, possiblement perquè no es garanteixen els mínims indispensables en el moment d'accedir al grau. S'han fet esforços importants en la introducció de proves per a l'accés als graus de mestre en les universitats públiques del país i cal continuar-los i millorar-los malgrat les reticències d'alguns, més centrades en interessos corporatius que en objeccions de fons.

D'altra banda, si som realistes i acceptem que a curt termini difícilment aconseguirem millorar de manera clara i general aquesta situació en l'àmbit del grau, potser seria adequat crear uns estudis de màster adreçats als graduats en magisteri que permetin aprofundir en l'ensenyament de les matemàtiques, tant a infantil com a primària, per tal d'esdevenir, en el futur, referents de l'aprenentatge matemàtic en els seus centres. Avui, que s'estableixen perfils de tota mena, aquest, que es pot enllaçar amb la formació continuada, potser ens ajudaria a millorar la situació a les escoles.

Per acabar aquest punt, vull fer una consideració sobre la formació permanent o continuada. Durant tots els anys que he treballat en el màster de secundària he considerat que un dels objectius fonamentals era convèncer els estudiants de professor que la formació continuada era un requisit prioritari per esdevenir un bon docent. La nostra és una professió viva i en evolució permanent que exigeix una millora i una posada al dia constant, i, per tant, crec que aquesta necessitat és indiscutible.

Ara bé, hi ha molts tipus de formacions interessants possibles, algunes de les quals ja s'estan fent, però crec que en els propers temps caldrà donar una rellevància especial a les que s'ocupin de la gestió de l'aula de matemàtiques, treballin a partir de la pràctica real de la classe, experimentin, observin i facin propostes de millora d'aquesta gestió. Una formació que pretengui ser transformadora ha de partir de la realitat de l'aula, de les problemàtiques i dificultats del professorat, no pot estar deslligada de la seva realitat i, sobretot, ha de tenir com a objectiu principal la millora de l'acció docent del conjunt de participants.

Un exemple d'aquest tipus de formació és l'*estudi de classes* (de matemàtiques), traducció de *lesson study*, que és un model de desenvolupament professional dels docents basat en una formació-acció col·laborativa que consisteix en la realització d'un cicle que s'inicia amb el disseny i l'experimentació d'una activitat d'aula, segueix amb una observació real d'aquesta i la seva anàlisi crítica, i finalitza amb una proposta de millora. Tot i que es tracta d'una formació entre iguals, sovint hi intervé un expert que actua com a assessor.

L'estudi de classes és un model de formació que es va iniciar al Japó fa molts anys, té una llarga tradició en aquell país i després s'ha estès a altres llocs dels món, per exemple als Estats Units. Les diferències culturals entre els diferents països i, en particular, la valoració de tot el que és col·lectiu per davant del que és individual, més pròpia de les civilitzacions orientals que de les occidentals, fan que l'aplicació del model original japonès no es pugui fer de manera mimètica, però crec que l'essència d'aquest tipus de formació, centrada en l'actuació del professorat a l'aula i la seva millora, sí que s'ha de poder aplicar a casa nostra i estic convençut que una pràctica sostinguda d'una formació com aquesta pot tenir resultats molt profitosos per al nostre sistema educatiu i, sobretot, per a la millora de l'ensenyament de les matemàtiques.

Tot i que es poden fer estudis de classes diversos, depenent de les condicions de partida, algunes característiques imprescindibles d'una formació com aquesta són:

- Formació entre iguals amb la col·laboració d'un assessor que proporciona ajudes als participants en els diferents moments del cicle.
- Participació activa de tots els assistents, cadascun desenvolupant el seu rol de manera profunda, amb implicació i corresponsabilitat de tothom.
- Focalització en la gestió de l'aula de l'experimentador dirigida a promoure un aprenentatge competencial de les matemàtiques i fixant-se de manera especial en com aprenen els estudiants i com participen en el seu aprenentatge.
- Anàlisi crítica i constructiva, a partir de les dades de l'observació de la classe, amb la finalitat d'aportar propostes de millora, però no de jutjar.

La recerca feta en l'estudi de classes és gran. Una bona introducció a aquest model de formació és el text de Murata «Conceptual overview of lesson study» (2011), que és un capítol del llibre *Lesson study research and practice in mathematics education* (Hart, Alston i Murata, 2011), dedicat a l'estudi de classes. També són interessants molts dels exemples que apareixen en el llibre *El estudio de clases japonés* (Isoda, Arcavi i Mena, 2007).

D'altra banda, també és possible i desitjable que models de formació com l'esmentat se centrin en com es fa de manera real l'avaluació dels aprenentatges a l'aula. Crec que queda molt camí encara per aconseguir que la majoria dels docents facin una avaluació realment competencial i encara més perquè considerin que la rellevància de l'avaluació no rau en els judicis, sinó en la seva contribució directa a la millora de l'aprenentatge (Deulofeu i Villalonga, 2018). Per això és necessari proposar i desenvolupar activitats d'avaluació, tant formativa com formadora, centrades a aprendre més i millor i on es posi el focus en una retroalimentació que impliqui una revisió constant del que es va aprenent.

M'atreveixo a apuntar que la importància de la retroalimentació, com un element clau no només de l'avaluació, sinó de l'aprenentatge en general, encara no és tinguda prou en compte. Cal fer una reflexió profunda sobre certes pràctiques encara habituals —com, per exemple, determinades formes de correcció d'exercicis a l'aula—, en el sentit d'analitzar quina és la seva vàlua real en termes d'aprenentatge per a tot l'alumnat d'una classe, ja que sovint aquestes pràctiques tenen un efecte positiu en un nombre molt reduït d'alumnes. Introduir activitats d'avaluació en què s'impliquin tots els alumnes, tant en la realització com en la valoració, com ara les pràctiques de coavaluació i d'autoavaluació, i també facilitar eines, per exemple les bases d'orientació que actuen com a bastides en el desenvolupament de processos complexos com la resolució de problemes, són avenços que ens han d'ajudar a aconseguir que l'avaluació, tant la formativa com la formadora, acabi esdevenint un dels instruments més valuosos per millorar l'aprenentatge. En aquest sentit, el marc proposat per Neus Sanmartí des de fa anys, lligat al desenvolupament d'un currículum per competències com el nostre (Sanmartí, 2020), esdevé una guia excel·lent, però en l'àmbit de l'educació matemàtica a casa nostra falten encara més treballs concrets en aquest sentit, com el de Torregrossa, Deulofeu i Albarracín (2021), que serveixin de guia al professorat i li proporcionin, al mateix temps, activitats i instruments d'avaluació per portar a l'aula.

Si bé la realització de formacions similars a la que acabo de descriure pot ser de gran ajuda i s'ha de potenciar, crec realment que el problema clau és l'extensió d'aquesta i d'altres formacions a la gran majoria del professorat. Fins que no aconseguim que tots els implicats en l'ensenyament entenguin que cal fer formació continuada, i que la gran majoria hi participin de manera activa, serà difícil millorar l'educació matemàtica del nostre país. I perquè millori cal, d'una banda, posar els mitjans necessaris i, de l'altra, que tots els docents entenguem que cal implicar-se en la formació continuada.

4. El Congrés Català d'Educació Matemàtica, C^{2}EM 2025, una oportunitat

Quan escric aquest article falten poc més de vint mesos perquè la comunitat d'ensenyants de matemàtiques de Catalunya ens retrobem a Lleida, els dies 7, 8 i 9 de juliol de 2025. Com sabeu, el Congrés d'Educació Matemàtica de l'any 2000, celebrat a Mataró, no va tenir continuïtat, fins que el 2016 es va celebrar a Barcelona el Congrés Català d'Educació Matemàtica (C^{2}EM), que tots anomenen *situem* i que organitza la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT). Aquesta vegada sí que hi ha hagut continuïtat, amb el C^{2}EM 2021 de Tarragona - Reus (la pandèmia va fer-lo endarrerir un any i passar-lo a un format en línia) i ara ja hem començat a preparar el C^{2}EM 2025, que celebrarem a Lleida.

Una iniciativa que em sembla interessant del C^{2}EM és que en les conclusions finals es pretén dissenyar una agenda que esdevingui una guia per treballar durant els propers quatre anys, el període entre congressos. Concretament, al darrer congrés (2021) es van consensuar dotze reptes dirigits a mestres i professorat, que, passats dos anys, segueixen tenint, al meu entendre, una validesa total.

Els reptes, que podeu trobar a https://ja.cat/ReptesC2EM, es poden agrupar en quatre grans àmbits i representen, crecm, una bona agenda per a l'acció:

- *Característiques de la formació inicial i permanent del professorat (reptes 1 i 2)*. Hem de treballar per a una millor formació del professorat de tots els nivells educatius, tant inicial com permanent, lligada a la realitat de l'alumnat d'avui, basada en la importància de l'ensenyament centrat en processos, focalitzada en el desenvolupament de les competències professionals dels docents i fonamentada en unes bases matemàtiques i didàctiques sòlides.
- *Necessitat de dinamitzar el treball col·laboratiu, enfortint equips i creant xarxes (reptes 3, 10, 11 i 12)*. Si estem d'acord que la interacció és fonamental per a l'aprenentatge i així tractem de fer-ho amb l'alumnat, cal també estimular la interacció entre els docents a tots els nivells. Per això potenciarem la creació d'equips docents en els centres i de xarxes intercentres, amb la finalitat de millorar la nostra tasca compartint materials, recursos i experiències.
- *Rellevància de les activitats d'aprenentatge per a l'aula i la seva gestió (reptes 4, 5 i 6)*. Tot i que no s'esmenta de manera explícita la importància de crear situacions d'aprenentatge amb les idees clau associades de context i repte, sí que hi ha referències a avançar per tal que les activitats d'aula siguin competencialment riques, en el sentit exposat anteriorment en aquest article, i a la importància de tenir bons ambients per experimentar i una bona gestió que fomenti la interacció.
- *El paper social de les matemàtiques més enllà de l'escola (reptes 7, 8 i 9)*. Quan qui aprèn troba sentit en el que fa, se sent capaç de fer-ho i gaudeix fent-ho, l'aprenentatge és millor i més gratificant. Però si les expectatives d'aprenentatge són baixes i les matemàtiques que s'aprenen estan tancades a l'aula i sense relació amb el que es fa al món, llavors tindrem un problema que ultrapassa la tasca dels docents. Cal, doncs, promoure la participació de tothom al voltant de les matemàtiques.

Com es pot veure, tenim un nombre considerable de reptes rellevants i plenament actuals que dissenyen una agenda al voltant de la qual podrem treballar plegats al llarg dels dos propers cursos. També serà important fer més aportacions per afrontar noves problemàtiques que els temps actuals ens vagin plantejant.

Ben segur que tothom trobarà el seu lloc d'acord amb els seus interessos i les seves possibilitats. En aquest sentit, les diferents associacions que conformen la FEEMCAT —i espero que també totes les altres entitats implicades en l'educació matemàtica— s'aniran fent ressò d'aquesta agenda i treballaran en aquesta línia per tal que tots plegats arribem ben preparats al Congrés del 2025. Us convido a totes i a tots a participar en aquest gran repte i a trobar-nos a Lleida per compartir el treball fet durant el temps que ens separa del Congrés.

5. Referències

[1] Abrantes, P. (1996). «El papel de la Resolución de Problemas en un contexto de innovación curricular». *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 7-18.
[2] Arcavi, A. (1999). «Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?». *Números*, 38, 39-56.

[3] Calvo, C.; Deulofeu, J.; Jareño, J.; Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

[4] Deulofeu, J.; Vila, A. (2021). «Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemes». A: Grupo de investigación en Educación Matemática Universidad de Alicante (ed.). *Ideas para la educación matemática: Perspectivas desde el Trabajo de María Luz Callejo de la Vega*. Múrcia: Compobell, 41-68.

[5] Deulofeu, J.; De la Fuente, A. (2022). «Desarrollar las competencias de resolución de problemas y modelización para aprender matemáticas». A: *Aportaciones al desarrollo del currículum desde la investigación en educación matemática*. Granada: SEIEM / Editorial de la Universidad de Granada, 373-398.

[6] Deulofeu, J.; Villalonga, J. (2018). «Resolución de problemas y regulación del aprendizaje». *Educatio Siglo XXI*, 36 (3), 153-175.

[7] Isoda, M.; Arcavi, A.; Mena, A. (2007). *El estudio de clases japonés.* Xile: Universidad Católica de Valparaíso.

[8] Murata, A. (2011). «Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study». A: Hart, L.; Alston, A.; Murata, A. (eds.). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1.

[9] Navarro, A.; Deulofeu, J. (2016). «Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia». *Suma*, 82, 9-17.

[10] Niss, M.; Højgaard, T. (eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Teaching and Learning in* Denmark. Roskilde University Press. Traducció a l'anglès de l'original danès (2002).

[11] Niss, M.; Højgaard, T. (2019). «Mathematical competencies revisited». *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9.

[12] Sanmartí, N. (2020). *Avaluar és aprendre: L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.* Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Educació, Gabinet Tècnic.

[13] Torregrosa, A.; Deulofeu, J.; Albarracín, Ll. (2021). «Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemes». *Bolema*, 35, 89-111. DOI: 10.1590/1980-4415V35N69A05.

Els menuts també fem *mates*

Cyntia Riquelme Carvallo
Col·legi Padre Damian Sagrados Corazones (Barcelona)
criquelm@xtec.cat

Tana Serra Santasusana[1]
Escola Vila Olímpica (Barcelona)
tserra@xtec.cat

Resum

En aquest article presentem el treball de creació de problemes competencials per a infants des dels quatre fins als dotze anys que fa el grup Fem Matemàtiques de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) i del Cercle de Mestres de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) perquè esdevinguin una font de recursos per als docents. Exposem el nostre convenciment que la feina com a mestres és fer créixer el pensament matemàtic que tot infant té, fomentant que l'infant pugui expressar la seva manera de fer i avançar en el raonament i la representació de les matemàtiques. Exposem el primer repte o problema per als més petits i mostres de resolució d'alumnes d'edats diferents.

Abstract

This paper presents the work carried out by the Fem matemàtiques *(Let's do math) group of the* Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya *(FEEMCAT, Federation of Entities for the Teaching of Mathematics in Catalonia) and the* Cercle de Mestres *(Circle of teachers) of the* Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques *(ABEAM, Barcelona Association for the Study and Learning of Mathematics). They developed competency-based problems for children aged between four and twelve with the aim of turning them into a resource for teachers. We believe that the role of teachers is to nurture the mathematical thinking present in all children, encouraging them to express their way of doing things, and advance in mathematical reasoning and representation. We present the first challenge or problem young learners are faced with, as well as examples of solutions from students of different ages.*

Ja fa més de vint-i-cinc anys que se celebra a Catalunya el concurs Fem Matemàtiques (https://fm.feemcat.org/). Durant la majoria de temps ha estat adreçat als nois i noies de sisè de primària i de primer i segon de l'educació secundària obligatòria (ESO). Des de 2022 s'hi va incorporar cinquè de primària, i el 2024, s'ha incorporat tercer i quart d'ESO. Des del començament s'ha treballat per estimular els alumnes a fer matemàtiques. S'han proposat tasques

1. Membres del grup Fem Matemàtiques de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) i del Cercle de Mestres de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM).

que, especialment en la primera fase, en què es fomenta el treball en petits grups, estimulin la resolució de problemes i expressin el procés de resolució per mitjà del raonament, la prova, la comunicació, la representació i les connexions, així com el descobriment de regularitats, que és l'objectiu final de les matemàtiques. El curs passat es va plantejar ampliar el Fem Matemàtiques als alumnes de cinquè de primària, per tal d'anar estenent aquesta manera de fer matemàtiques.

1. I, ara, Fem Matemàtiques per als més menuts?

Sí, aquest és el nostre repte: el Fem matemàtiques a totes les edats de l'educació infantil i primària per tal que tots els nens i nenes tinguin l'oportunitat de desenvolupar el pensament matemàtic. En aquesta ocasió, a diferència de cinquè i sisè, no es tracta pas d'un concurs, sinó d'oferir tasques, activitats i situacions d'aprenentatge que fomentin *Fer matemàtiques* a les aules, en un format que anomenem **Els Reptes del Cercle**.

I, sí, els més menuts també poden fer *mates* de manera intuïtiva i informal. Si recollim el fer de les criatures d'educació infantil davant del seu entorn, podem concloure que en tot moment es plantegen problemes perquè se'ls posen davant situacions noves per a les quals no tenen cap solució prevista: com obrir la porta, si no arribo al pany? Potser es posarà de puntetes, saltarà, demanarà algú que l'obri, anirà a buscar una cadira i s'enfilarà... Tindrà iniciatives, provarà, hi haurà intents infructuosos i d'altres amb èxit, i més endavant aplicarà la solució trobada a la mateixa situació o a una de semblant. Si analitzem el procés emprat, ens adonarem que segueix gairebé fil per randa el que desitjaríem molts mestres que fessin tots els infants davant dels reptes matemàtics. Es tracta, doncs, de recollir aquest fer dins del context relacionat amb les matemàtiques.

2. Fer créixer el pensament matemàtic

Estem convençudes que totes les criatures, quan arriben a l'escola, tenen dintre seu, a la seva manera, pensament matemàtic, i la nostra tasca com a mestres és fer-lo créixer. Vegem-ne un exemple. Els infants d'educació infantil (I4) comenten a la mestra:

—En aquella classe hi ha molts números —fan referència al panell de l'1 al 100 que veuen a l'aula del servei d'acollida de l'escola.

Panell numèric de l'1 al 100.

La mestra va a buscar el panell i se'l miren entre tots.

—Què hi veieu? —pregunta la mestra.

—A dalt només hi ha un número, a baix n'hi ha dos —comenta una nena.

—Al final hi ha tres números —diu un altre.

—Aquí tots tenen un 1 —un nen assenyala la columna on totes les unitats són un 1.

La conversa sobre el panell s'estén i alguns infants manifesten interès per fer un panell. La mestra el recull i...

Bé, no es tracta en aquest article de descriure aquesta situació d'aprenentatge, sinó més aviat de mostrar les possibilitats que tenen els nens i les nenes de resoldre problemes, però també de plantejar-se'n. Quan uns vailets d'educació infantil (I4) diuen que volen fer un panell, això és plantejar-se un problema.

A partir de l'observació comuniquen regularitats i raonen:

—En aquesta hi ha 1 i en aquesta, 2 —assenyalen l'altra columna.

Per fer el seu panell, proven sense cessar fins que troben formes per dibuixar quadrícules.

Una nena fa un panell que té sis columnes i aleshores els nombres no li queden disposats com als altres nens i nenes, i això genera una discussió entre ells. La mestra els demana com pot ser que els nombres d'un panell i l'altre no estiguin posats de la mateixa manera. Algú conclou que el d'aquella nena no té tantes *piles* —es refereix a les columnes—. S'ha establert una connexió.

Si entenem les matemàtiques com el saber que estableix relacions i regularitats allà on, aparentment, tot és diferent;

Si entenem les matemàtiques com un procés, com una manera de fer i de descobrir per comprendre millor l'entorn, que implica: plantejar-se i identificar problemes, provar, raonar, comunicar, representar, connectar, generalitzar;

Si entenem que tots els nens i nenes, a la seva manera, poden progressar en el pensament matemàtic (competència matemàtica);

Si entenem que emprar el llenguatge matemàtic és fruit d'un procés amb sentit per a cadascú, estarem d'acord que l'escola pot fer créixer el pensament matemàtic de tots els infants.

3. Avançar en la representació de les matemàtiques que fem

Per als nens i nenes d'educació infantil i primària l'escola esdevé la casa on, no de forma única, però sí principalment, aprenen a usar el llenguatge verbal escrit (lectura i escriptura), el llenguatge matemàtic, el llenguatge musical...

Comprendre el llenguatge matemàtic és una tasca complexa per a tots perquè és un llenguatge abstracte i sintètic. Com tot llenguatge, té implícita una simbologia. I, sí, el llenguatge matemàtic ha d'esdevenir simbòlic per a totes les criatures. Tots, d'una manera o d'una altra, li han de poder atorgar el «seu» significat.

Quan els infants s'impliquen en la resolució de problemes, volen explicar a la seva manera com troben les respostes. I és en aquest com, en aquest procés, que mostren les «seves» formes particulars i personals de descriure què han fet, què han pensat, què han imaginat...: representen les seves matemàtiques.

Les representacions dels infants acostumen a seguir una evolució que va de les més concretes a les més simbòliques, de manera que sovint la mostra de l'experimentació amb materials apareix en primer lloc; a continuació, o de forma simultània, es fa present la representació verbal, moltes vegades dins de la conversa matemàtica; després apareixen el dibuix, els esquemes o diagrames, i és al final quan fan ús del llenguatge matemàtic, quan són capaços d'escriure i llegir frases matemàtiques, equacions.

Els reptes que es proposen per als més menuts cerquen que es pugui manifestar una diversitat de representacions a cada aula. I ara ens podríem preguntar: quin és el paper de la mestra? Justament el de fomentar que cada infant pugui expressar a la seva manera què ha fet.

4. El primer repte del Cercle per als més menuts: Les Torres de la Reina

El Cercle de Mestres de l'ABEAM és un grup de treball de didàctica de les matemàtiques d'infantil i primària que forma part d'aquesta associació de docents per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques de les comarques de Barcelona i que participa en la creació de problemes al concurs Fem Matemàtiques per a cinquè i sisè de primària.

A partir de totes les idees anteriors i de la creença que des de molt petits els nens poden fer activitats que impliquin pensament matemàtic, us presentem una de les feines que ens havíem marcat com a objectiu prioritari: Els Reptes del Cercle. Consisteix a proposar problemes competencials com els de la primera fase del concurs Fem Matemàtiques a l'alumnat de l'etapa d'educació infantil i dels cicles inicial i mitjà d'educació primària.

El primer és un repte dedicat als infants d'educació infantil fins a segon o tercer de primària: la història d'una reina que vol construir un castell amb moltes torres. Una història perquè els vostres nens i nenes s'impliquin i ajudin la reina en el seu dilema.

http://abeam.feemcat.org/web/cercle_mestres/les-torres-de-la-reina/. Font: MathPickle.

L’activitat es presenta en diversos apartats, que exposem a continuació.

Enunciat

Hi havia una vegada una reina que volia construir un castell amb torres. Les fades li van dir que si volia que fos màgic, totes les torres havien de tenir diferents alçades.

La reina només tenia deu blocs de pedra. Els habitants del poble van presentar diferents propostes...

Aquest castell seria màgic?...

I aquest?...

Ara la reina ens demana ajuda a nosaltres: podeu trobar una solució?

QR per enllaç enunciat i dibuixos.

Per començar

Entre tots llegim el conte. Teniu la presentació en PowerPoint, que permet anar seguint la història i que els infants hi puguin participar.

Una vegada llançat el repte, poden treballar en grups petits i amb caixes grans perquè per separat puguin presentar les seves propostes.

Si són més grans, poden utilitzar cubs encaixables o *multilink*.

Una vegada cada grup presenta la seva proposta, es discuteix si compleix o no les condicions.

Recursos per al docent

- *Idees centrals*: comptant podem saber quants n'hi ha. Pensament additiu: aplicar flexiblement la suma i la resta a situacions concretes. Equivalència.
- *Etiquetes*: descomposició additiva. Treball exhaustiu i sistemàtic.
- *Sentits*: numèric i algebraic.
- *Dimensions*: resolució de problemes. Raonament i prova.
- *Nivell*: des de P4 fins al cicle inicial de primària.
- *Per què hem seleccionat aquest problema?*

Aquest és el primer dels reptes que hem escollit per als més petits. És un problema que té múltiples solucions i que permet ser resolt mitjançant l'experimentació amb material i fent diferents proves. Darrere de cada prova que fan els alumnes, convé reflexionar amb ells sobre si la solució és vàlida o no i per què. Hem d'aconseguir que parlin entre ells i que justifiquin la decisió presa i si és correcta o no. Tot això provocarà un treball dels processos de raonament i prova:

— Si la solució que han donat no funciona, què haurem de fer perquè sí que funcioni?

I també un treball exhaustiu per cercar totes les solucions que hi ha:

— Quantes solucions possibles podem donar?

I, dintre de les possibilitats dels alumnes, podem intentar que siguin més o menys sistemàtics en la cerca de totes les possibles solucions:

— Com sabeu que són totes les possibles?

— Com podem fer per no deixar-nos-en cap?

El problema se centra en el sentit numèric i la descomposició del 10: relacionar les diferents descomposicions de dos, tres o quatre sumands i reconèixer que, tot i no ser idèntiques, tenen el mateix valor si es vincula de forma clara amb la idea d'equivalència. En el cas dels més petits, podem començar per la descomposició del 5 o del 6.

A banda que hi ha més d'una solució, la dificultat rau en el fet que no només fem descomposicions en dos nombres, sinó que s'admet la descomposició en tres i quatre nombres (aspecte que moltes vegades no treballem a l'aula).

L'activitat genera la possibilitat d'expressar diferents representacions, des de les fetes amb material (capses, policubs, gomets), passant per les pictòriques, més gràfiques, fins a les que emprin llenguatge matemàtic: nombres i símbols de les operacions.

Preguntes clau

Una vegada han presentat i discutit algunes de les propostes, ja podem començar a fer un treball més exhaustiu:

Hem trobat algunes solucions, però...

Com podeu assegurar que són diferents?

En podeu trobar més?

Què podeu fer per trobar-ne més?

Podeu trobar-les totes?

Quina prova podeu fer per estar segurs que no n'hi ha més?

Possible extensió

És el mateix la solució 1, 2, 3, 4, que la solució 4, 3, 2, 1?

Si considerem que no és el mateix, quantes solucions possibles hi haurà?

Què passaria si, en lloc de tenir deu blocs, en tinguéssim nou?

I si en tinguéssim onze?

Recursos

Material per poder experimentar: capses per als més petits, cubs encaixables, gomets...

Treball en grups petits, en grups grans i individual.

Conversa matemàtica entorn de les propostes per acordar-ne les similituds i les diferències.

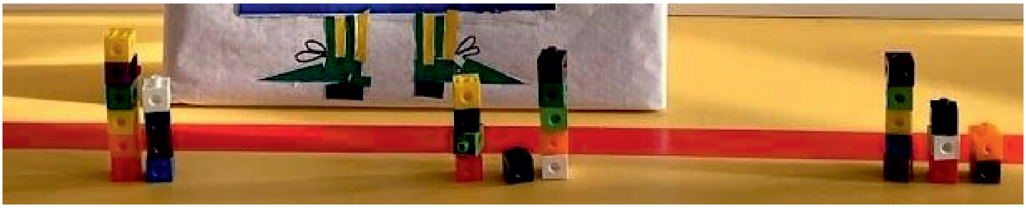
Gestió de l'aula per part de la mestra: estimular i animar a l'experimentació, a la representació del procés, al raonament de les connexions...

Mostres dels nens i nenes

Educació infantil 4

Ho representen amb les caixes:

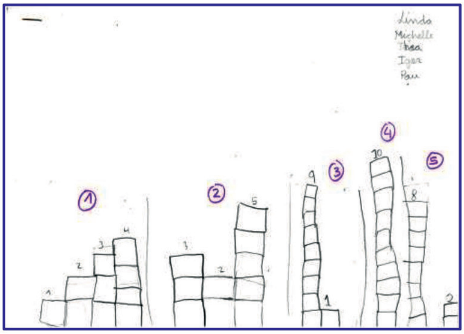
Tradueixen la representació amb cubs encaixables:

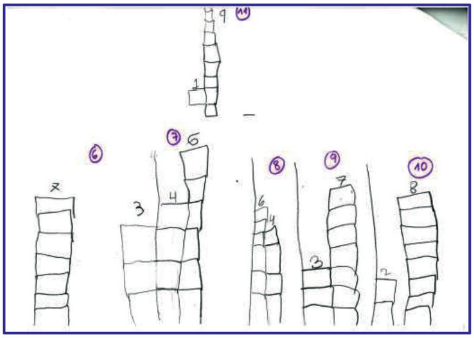


Mostren diferents disposicions amb gomets de forma individual. Un d’ells explora una descomposició que no s’ha fet en grup gran.

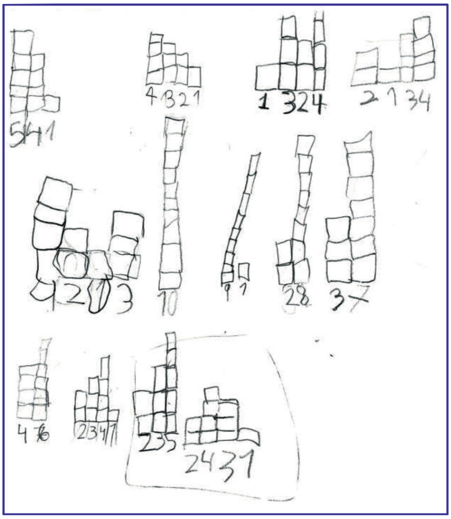
Segon de primària

Cerquen descomposicions en dos, tres i quatre nombres:





Indaguen descomposicions en les quals no canvien els nombres, sinó la disposició:



5. Conclusions

Estem oberts a la participació!

Esperem que tant el Fem Matemàtiques de cinquè i sisè com Els Reptes del Cercle (que trobareu a https://abeam.feemcat.org/web/category/reptes-del-cercle/) esdevinguin bons recursos de problemes competencials per tal que els feu a les vostres aules.

Estarem molt satisfets que ens envieu les respostes, representacions i evidències de les descobertes dels vostres alumnes. D'aquesta manera podrem fer-ne un recull, analitzar les respostes i compartir-les.

Des de la creença que tots els infants poden fer matemàtiques.

Referències bibliogràfiques

[1] Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM): Les Torres de la Reina. http://abeam.feemcat.org/web/cercle_mestres/les-torres-de-la-reina/.
[2] Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT): concurs «Fem matemàtiques». https://fm.feemcat.org/.
[3] Generalitat de Catalunya (gener 2023): *Ara matemàtiques. Saber-ne més per ensenyar-les millor. Dimensions.* https://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/cursos/curriculum/inf_pri/aramat/m3/index.
[4] Hamilton, G. (2010). «Building Skyscrapers of Different Heights». *MathPickle*. https://mathpickle.com/project/4112/.
[5] National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Regressió i correlació lineal. Teoria i pràctica

Francesc Carreras i Antoni Magaña
Departament de Matemàtiques,
Universitat Politècnica de Catalunya
Autor per a la correspondència.
Adreça electrònica: antonio.magana@upc.edu.

Resum

El principi dels mínims quadrats permet construir les dues rectes de regressió d'una distribució bidimensional. El coeficient de correlació entre les dues variables coincideix amb l'arrel quadrada del producte dels pendents de les dues rectes. La generalització a més variables segueix un patró similar. Després d'una revisió comentada d'aquest material teòric, l'apliquem a l'estudi de diverses situacions concretes i interpretem els resultats obtinguts.

Abstract

The principle of least squares makes it possible to construct the two regression lines of a two—dimensional distribution. The correlation coefficient between the two variables coincides with the square root of the product of the slopes of the two lines. Generalization to more variables follows a similar pattern. After a commented review of this theoretical material, we apply it to the study of several concrete situations and interpret the results obtained.

Paraules clau: distribucions bi i tridimensionals, correlació i regressió lineal, error quadràtic, sudoku, targetes de crèdit, venda lliure, competició futbolística, qualificacions acadèmiques, temperatura de xafogor.

Keywords: *two— and three—dimensional distributions, correlation and linear regression, quadratic error, sudoku, credit cards, free sale, football competition, academic grades, temperature—humidity index.*

Codi(s) MSC2010: primari 62 Estadística; secundaris 62J05 (Regressió Lineal) i 62P99 (Aplicacions).

MSC2010 Code(s): primary 62 Statistics; secondary 62J05 (Linear Regression) and 62P99 (Applications).

1. Introducció

Les matemàtiques constitueixen un camp científic molt singular. Per una banda, són una ciència independent, en el sentit que és possible definir conceptes, establir propietats i plantejar i resoldre problemes, tot expressat en termes estrictament matemàtics. Aquesta *internalitat* atrau i satisfà molts investigadors, que centren en ella els seus esforços i arriben a resultats admirables.

Per altra banda, hi ha matemàtics que admeten un vessant d'*externalitat*, segons el qual les matemàtiques són d'utilitat per estudiar problemes plantejats fora del seu àmbit estricte, modelitzar—los, i aplicar—hi la potència deductiva i el rigor típicament matemàtics per obtenir resultats interpretables i profitosos en l'àmbit que ha inspirat el problema. També molts investigadors es dediquen a aquests processos perquè, en certa manera, la connexió amb la realitat externa a les matemàtiques els dóna un plus de satisfacció. Per descomptat, hi ha matemàtics que treballen en ambdós vessants.

En aquest article hem adoptat una postura relativament mixta i ens proposem analitzar amb eines matemàtiques situacions ben conegudes que semblen allunyades de les matemàtiques. Hem seleccionat diverses situacions extretes del dia a dia i les hem analitzat amb eines estadístiques per obtenir conclusions sobre cada una d'elles. Entre les situacions que estudiem es troben, per exemple, la dificultat en la resolució d'un sudoku depenent del nombre de dades inicials o el comportament dels equips en el campionat de lliga de la Primera Divisió espanyola de futbol masculí. L'estudi d'aquests casos és la nostra aportació a l'externalitat que hem comentat abans. Tanmateix, també hem inclòs una secció tècnica prèvia on es justifiquen i es comenten amb deteniment els conceptes i les propietats que s'utilitzen després. Això pertany a l'àmbit de la internalitat.

En particular, com a matemàtics ens sembla admirable el *principi dels mínims quadrats*. Suposem que volem quantificar la dispersió d'un conjunt de dades, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, respecte a una mesura de centralització x que resumeix el conjunt. És a dir, volem calcular la distància entre el conjunt de dades i aquesta mesura x. Una manera podria ser considerar la mitjana dels valors absoluts de les diferències entre x i cadascuna de les x_i, és a dir, prendre la *desviació mitjana*:

$$\frac{|x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|}{n}.$$

Tanmateix, el valor absolut és una funció no derivable en els punts on s'anul·la. Això va conduir a prendre la mitjana dels quadrats de les desviacions i, per conservar la magnitud en què s'expressen les dades, aplicar finalment l'arrel quadrada:

$$\sqrt{\frac{(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2}{n}}.$$

Aquesta és l'anomenada *desviació típica* σ_x (respecte a x) del conjunt de dades.

De fet, la mateixa idea de *mitjana aritmètica* ja és una aplicació del principi dels mínims quadrats: la mitjana aritmètica $\overline{x}$ d'un conjunt de dades, definida com

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

i utilitzada amb tanta freqüència en qualsevol context, és l'única mesura de centralització que minimitza la suma dels quadrats de les desviacions respecte a ella. Aquesta propietat es pot demostrar fàcilment amb eines de càlcul infinitesimal o, alternativament, d'àlgebra lineal. Fins i tot la *mitjana geomètrica* $\overline{x}_g$, que es defineix com

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

es basa en el fons en el mateix principi, ja que, aplicant logaritmes,

$$\log \overline{x}_g = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n}{n}.$$

El principi dels mínims quadrats és també el fonament de la recta de regressió d'una distribució bidimensional i, més en general, permet definir i calcular les solucions aproximades de qualsevol sistema d'equacions lineals. Ens ha semblat oportú mostrar, en la secció tècnica, com es construeix la recta de regressió, tant des del punt de vista del càlcul infinitesimal com des del de l'àlgebra lineal.

Després d'aquest prefaci, passem a descriure l'organització de l'article. En la secció 2 presentem, com a motivació, un dels exemples que estudiarem després. La secció 3, dividida en diverses subseccions, és la part tècnica, on recollim: un sumari dels conceptes i propietats que aplicarem; un complement dedicat a la recta de regressió d'una distribució bidimensional; un altre amb els comentaris addicionals que hem cregut adients, i una última subsecció on, més breument, descrivim les eines per estudiar distribucions tridimensionals.

Les seccions següents estan dedicades, cada una, a un exemple concret: els sudokus (secció 4), l'ús de les targetes de crèdit en un comerç (secció 5), el paper de la venda lliure en una farmàcia, on hi ha una remuneració oficial provinent del CatSalut (secció 6), el comportament dels equips de futbol en la lliga de Primera Divisió espanyola (secció 7), les qualificacions acadèmiques en tres assignatures estretament relacionades (secció 8) i el concepte de temperatura de xafogor (secció 9). En els exemples 4—7 i en la primera part del 8, tractem amb distribucions bidimensionals, mentre que en la segona part del 8 i en les quatre parts del 9 estudiem distribucions tridimensionals. La secció 10 presenta les conclusions del treball. Finalment, donem una bibliografia comentada sobre els temes tractats en l'article.

En tots els exemples el tractament és similar. Calculem els principals paràmetres de les distribucions rellevants: coeficient de correlació, recta de regressió (pla de regressió, en el casos tridimensionals finals), centre de gravetat i error(s) quadràtic(s). En els casos bidimensionals afegim el diagrama de dispersió. En tots els exemples comentem els resultats i, si escau, les particularitats específiques de cada situació.

Ens agradaria que aquest article animés alguns lectors a aplicar les matemàtiques a qualsevol nivell, des del més elemental, com el del nostre treball, fins al molt superior de la intel·ligència artificial, l'anàlisi de dades massives (*big data*) o l'aprenentatge automàtic (*machine learning*), «les joies de la corona» actuals de l'opció que hem anomenat externalitat.

2. Un exemple il·lustratiu: sudokus

Tothom sap què és un sudoku i quin problema planteja. És un trencaclosques matemàtic. Es tracta d'omplir amb les xifres de l'1 al 9 una quadrícula de 9 $\times$ 9 cel·les dividida en 9 subquadrícules de 3 $\times$ 3. No es pot repetir cap número en cap fila, en cap columna ni en cap subquadrícula. En cada sudoku concret, certes cel·les ja porten d'entrada el número posat (són les *dades*).

Hi ha dues intuïcions que són *vox populi* entre els aficionats als sudokus: (a) amb menys de 17 dades la solució no serà mai única; (b) amb 17 dades o més sempre hi ha una solució única. L'any 2014, juntament amb dos col·legues, el matemàtic Gary McGuire, de la Universitat de Dublín, va demostrar computacionalment que cap sudoku amb *exactament* 16 dades té solució única, però no que amb 17 dades o més es garanteixi que la solució és única. De fet, nosaltres hem trobat un sudoku amb 53 dades (!) que té tres solucions o més, cosa que desmunta de forma radical la intuïció (b). McGuire també va constatar que la majoria de sudokus tenen unes 25 dades. Un exemple de sudoku amb 24 dades es pot veure a la figura 1, on curiosament (no és freqüent) notem que hi ha simetria horizontal i també vertical, i per tant també simetria central, en la posició de les dades.

	9			6			2	
			4	3	9			
		1				8		
9				7				2
			8		1			
3				5				4
		8				6		
			5	9	3			
	5			8			1	

Figura 1. Un sudoku.

Sembla lògic pensar que, com menys dades tingui un sudoku, més difícil serà resoldre'l. Això no és cap propietat general. Sovint hi ha valoracions de la dificultat dels sudokus amb asteriscos, però generalment les fan les persones que els proposen i, per tant, poden ser subjectives.

A la secció 4 tornarem a aquest exemple i ens plantejarem si hi ha relació entre el nombre de dades d'un sudoku i el seu grau de dificultat expressat numèricament (i, per força, subjectiu).

3. Fonaments teòrics

En aquesta secció exposem els conceptes i resultats de l'estadística descriptiva que seran d'utilitat en el nostre estudi d'exemples concrets. Hi afegim dues subseccions on tractem amb més deteniment alguns punts i proveïm comentaris i demostracions de determinats resultats. Posem més èmfasi en el que es refereix a distribucions bidimensionals i analitzem més breument el que fa referència a distribucions tridimensionals, com una mostra de la generalització natural del cas anterior a més dimensions.

3.1. Distribucions bidimensionals

3.1.1. Recta de regressió i correlació lineal

Tenim dues *sèries de dades* amb n termes: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Considerades conjuntament, formen una *distribució bidimensional*. De vegades interessa saber si hi ha relació entre les dades de la primera sèrie i les de la segona i, més concretament, si aquesta relació és aproximadament lineal. En cas que la resposta sigui afirmativa, té sentit construir l'anomenada *recta de regressió*, que dona explícitament la relació entre les variables x i y. Aquesta recta permet, entre altres coses, fer prediccions: donat un valor de x diferent de les dades de la primera sèrie, la imatge de x en la recta de regressió ens proporciona el possible valor de y que li correspondria.

L'única restricció que imposarem d'entrada és que els punts no es trobin tots en una mateixa vertical, és a dir, que no tinguem $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, perquè en aquest cas no existiria recta de regressió de y sobre x. Se sap que les *mitjanes aritmètiques* són:[1]

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \text{i} \quad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n}.$$

I que les *desviacions típiques* σ_x i σ_y queden definides per les *variàncies* respectives:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} \quad \text{i} \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \overline{y})^2}{n}.$$

També se sap que

$$\sigma_x^2 = \overline{x_2} - \overline{x}^2 \quad \text{i, analògament,} \quad \sigma_y^2 = \overline{y_2} - \overline{y}^2,$$

on $\overline{x_2}$ i $\overline{y_2}$ són les respectives mitjanes aritmètiques dels quadrats. Així, la variància és «la mitjana dels quadrats menys el quadrat de la mitjana». La demostració és, per exemple per a les x:

1. $\sum$ significarà sempre $\sum_{i=1}^{n}$. En qualsevol altre cas, els límits del sumatori estaran especificats.

$$n\sigma_x^2 = \sum(x_i - \overline{x})^2 = \sum x_i^2 - 2\overline{x}\sum x_i + n\overline{x}^2 = \sum x_i^2 - n\overline{x}^2.$$

Fins aquí, els paràmetres s'apliquen a cada sèrie per separat. A partir d'ara, els paràmetres descriuran la distribució bidimensional i dependran de les dues sèries alhora.

La *covariància* de les dues sèries és $cov(x,y) = \sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$. És fàcil veure que

$$cov(x,y) = \vec{x}.\vec{y} - n\,\overline{x}\,\overline{y},$$

és a dir, el producte escalar dels vectors menys n vegades el producte de les mitjanes.

El *coeficient de correlació* $r(x,y)$ de la distribució bidimensional és

$$r(x,y) = \frac{cov(x,y)}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2\sum(y_i - \overline{y})^2}}.$$

Sempre tenim $r(x,y) \in [-1,1]$, i la segona expressió és la més còmoda per calcular-lo tabularment. Per a més detalls sobre correlació i covariància, vegeu més avall la secció 3.1.3.

La *recta de regressió de y sobre x* és de la forma

$$y - \overline{y} = m(x - \overline{x}),$$

on $(\overline{x},\overline{y})$ és el *centre de gravetat* de la distribució i el *pendent m* és

$$m = \frac{cov(x,y)}{n\sigma_x^2} = \frac{\vec{x}.\vec{y} - n\,\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x^2} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2},$$

on $\overline{xy} = \dfrac{\sum x_i y_i}{n}$ és la mitjana dels productes de les dues sèries. La quarta expressió és la més còmoda si estem fent els càlculs tabularment. Sol ser interessant i il·lustratiu dibuixar el *diagrama de dispersió* de les dades sobre uns eixos rectangulars $x{-}y$ juntament amb la gràfica de la recta de regressió. Per a més detalls sobre el fonament de la recta de regressió, vegeu la secció 3.1.2.

L'*error quadràtic* ε d'aquesta recta de regressió és

$$\varepsilon = \sqrt{\sum(y_i - y_i^*)^2}, \quad \text{on} \quad y_i^* = \overline{y} + m(x_i - \overline{x}) \quad \text{per a cada} \quad (x_i,y_i).$$

L'*error per capita* $\varepsilon_0 = \varepsilon/n$ sembla més interessant a efectes comparatius, ja que reparteix l'error total entre les n dades (x_i,y_i). Va bé per comparar distribucions bidimensionals amb diferent nombre de dades n. Quan volem comparar dues distribucions on els rangs de variació de y són molt diferents, un tercer error sembla adequat: consisteix a dividir l'error per capita per la mitjana aritmètica $\overline{y}$, que prenem com a representativa de tots els valors de y en cada cas, i obtenim, doncs, l'*error (per capita) normalitzat* $\varepsilon_0^* = \varepsilon_0/\overline{y}$.

3.1.2. La recta de regressió de y sobre x

Hi ha dos mètodes principals per fonamentar i obtenir la recta de regressió: un és l'*analític*, basat en el càlcul infinitesimal, i l'altre és l'*algebraic*, basat en l'àlgebra lineal. Tots dos estan inspirats pel *principi dels mínims quadrats*: la recta de regressió minimitza la suma dels quadrats de les desviacions respecte a la sèrie de les y o, equivalentment, l'error quadràtic definit unes línies més amunt.

A. Mètode analític. La recta de regressió és de la forma

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Idealment, tots els punts de la distribució haurien de satisfer aquesta equació, és a dir,

$$y_i = a_0 + a_1 x_i \quad \text{per a } i = 1,2,\ldots,n.$$

Tanmateix, usualment aquest sistema de n equacions amb dues incògnites a_0, a_1 no té solució perquè els n punts no estan alineats. Considerem la suma dels quadrats dels errors comesos entre els valors reals y_i, donats per la distribució, i els que donaria la recta de regressió, $y_i^* = a_0 + a_1 x_i$. Tindrem un «error total» E, donat per

$$E = \sum (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2.$$

Aquest error total E, que depèn de a_0 i a_1, és una funció contínua, diferenciable i no negativa, i no té cap màxim absolut perquè, quan a_0, a_1 o tots dos tendeixen cap a ∞, E tendeix també cap a ∞. En canvi, comprovarem que té un únic mínim absolut, que podrem localitzar com a mínim local. Primer imposem que les dues derivades parcials de E s'anul·lin (condició necessària de punt crític o extrem local):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_0} &= 2\sum (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 2\sum (a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0, \end{aligned} \right. \qquad \text{és a dir,} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum y_i &= n a_0 + a_1 \sum x_i, \\ \sum x_i y_i &= a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2. \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Aquest és un sistema de dues equacions lineals amb les incògnites a_0 i a_1. Ara fem les derivades parcials segones:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a_0^2} = 2n, \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial a_1 \partial a_0} = 2\sum x_i,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a_0 \partial a_1} = 2\sum x_i, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial a_1^2} = 2\sum x_i^2.$$

Aquestes quatre derivades parcials segones, disposades tal com estan, defineixen la matriu hessiana $H(E)$ de la funció E. Aquesta matriu és també la matriu dels coeficients del sistema (1) donat per l'anul·lació de les primeres derivades parcials, i observem que és constant (independent de a_0 i a_1). Calculem ara el seu determinant (per simplicitat, prescindim dels coeficients 2 de totes les derivades segones, cosa que no afectarà el raonament):

$$\det H(E) = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 .$$

Per veure que sempre és positiu, comprovarem primer que

$$\det H(E) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i - x_j)^2. \tag{2}$$

La demostració és per inducció sobre $n \geqslant 2$. (a) Per a $n = 2$ tenim

$$\det H(E) = 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2.$$

(b) Suposem $n \geqslant 3$ i que la fórmula (2) val per a $2,\ldots,n-1$. Aleshores,

$$\det H(E) = n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2 = n\sum_1^{n-1} x_i^2 + nx_n^2 - \left(\sum_1^{n-1} x_i + x_n\right)^2 =$$

$$= n\sum_1^{n-1} x_i^2 - \left(\sum_1^{n-1} x_i\right)^2 - 2x_n\sum_1^{n-1} x_i - x_n^2 + nx_n^2 =$$

$$= \left[(n-1)\sum_1^{n-1} x_i^2 - \left(\sum_1^{n-1} x_i\right)^2\right] + \sum_1^{n-1} x_i^2 - 2x_n\sum_1^{n-1} x_i + (n-1)x_n^2.$$

Per hipòtesi d'inducció, coneixem la suma dels dos primers termes (entre claudàtors); per tant,

$$\det H(E) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} (x_i - x_j)^2 + R,$$

on R recull els dos termes restants. Ara tenim

$$R = \sum_1^{n-1} x_i^2 - 2x_n\sum_1^{n-1} x_i + (n-1)x_n^2 = \sum_1^{n-1}(x_i - 2x_n)x_i + (n-1)x_n^2 =$$

$$= \sum_1^{n-1}(x_i - 2x_n)x_i + \sum_1^{n-1} x_n^2 = \sum_1^{n-1}(x_i^2 - 2x_ix_n + x_n^2) =$$

$$= \sum_1^{n-1}(x_i - x_n)^2.$$

Finalment,

$$\det H(E) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} (x_i - x_j)^2 + \sum_1^{n-1}(x_i - x_n)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_i - x_j)^2.$$

Com que no tots els punts de la distribució es troben en una única vertical, almenys hi haurà un parell *i,j* tals que $x_i \neq x_j$, i $\det H(E)$ serà positiu. Per tant, hi haurà només un punt crític.

Aplicant, per exemple, la regla de Cramer al sistema (1), trobem els coeficients i l'equació de la recta de regressió, que és

$$y = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} x + \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

En el cas $n = 2$, l'equació anterior es redueix a

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2},$$

que és simplement la recta que passa pels dos punts (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

Ara comprovem que en el punt crític hi ha un mínim absolut de E. La forma quadràtica definida per la matriu $H(E)$ és definida positiva segons el criteri de Sylvester, ja que el seu primer coeficient i el seu determinant són positius. Això implica que la fórmula de Taylor de grau 2 de la funció E en el punt crític $p = (a_0, a_1)$ és, per a qualsevol punt (x, y) del pla,

$$E = f(x,y) = f(p) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - a_0 & y - a_1 \end{pmatrix} H(E) \begin{pmatrix} x - a_0 \\ y - a_1 \end{pmatrix} > f(p),$$

ja que $H(E)$ és definida positiva (el residu de la fórmula és 0 perquè E és una funció polinòmica de segon grau de a_0, a_1). Això demostra que en el punt crític $p = (a_0, a_1)$ hi ha (l'únic) mínim absolut de E.

Tornant al cas general, és immediat comprovar amb la primera de les equacions de (1) que la recta de regressió passa pel centre de gravetat de la distribució, ja que

$$\frac{\sum y_i}{n} = a_0 + a_1 \frac{\sum x_i}{n}.$$

B. Mètode algebraic. Tornem a suposar que la recta que busquem és de la forma

$$y = a_1 x + a_0.$$

Novament, tots els punts de la distribució haurien de satisfer aquesta equació. Això ens donaria un sistema de n equacions lineals amb dues incògnites: a_1 i a_0. Escrit en forma breu seria

$$a_1 x_i + a_0 = y_i \quad \text{per } i = 1, 2, \ldots, n.$$

En forma matricial el sistema s'escriu

$$CX = D$$

o, més explícitament,

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \ldots & 1 \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

En general, el sistema serà incompatible llevat que els n punts estiguin alineats. En termes vectorials, busquem dins de l'espai $\mathbb{R}^n$ un vector u' del pla H generat per $c_1 = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i $c_2 = (1,1,\ldots,1)$ tal que $u' = u$, i és, doncs,

$$u' = a_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) + a_0(1,1,\ldots,1) = (y_1,y_2,\ldots,y_n) = u.$$

Que el sistema sigui incompatible significa que $u = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \notin H$, i per tant la relació precedent és impossible. L'alternativa proposada pel *principi dels mínims quadrats* consisteix a buscar el vector $u' \in H$ *més pròxim* a u, i per tant u' ha de ser la *projecció ortogonal* de u sobre H perquè és la que *minimitza* $||u - u'||$ entre tots els vectors $u' \in H$. La condició que ha de complir $u' \in H$ per ser la projecció ortogonal de u sobre H és que $u - u' \perp H$, que es tradueix en

$$u - u' \perp c_1 \quad \text{i} \quad u - u' \perp c_2.$$

Això equival a imposar

$$u \cdot c_1 = u' \cdot c_1 \quad \text{i} \quad u \cdot c_2 = u' \cdot c_2,$$

que podem expressar matricialment com

$$C^t CX = C^t D,$$

o, introduint $A = C^t C$ i $B = C^t D$ (A resulta quadrada 2×2 i simètrica),

$$AX = B,$$

sistema compatible i, a més, determinat (solució única), ja que explícitament queda

$$A = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\det A = \det H(E) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 \neq 0$$

i la solució única del sistema $AX = B$ és la mateixa que dona el mètode analític. A més,

$$\varepsilon = ||u - u'|| = \sqrt{E},$$

que és el que s'anomena *error quadràtic* de la recta de regressió obtinguda.

No és difícil veure que el pendent m de la recta de regressió definit en la secció 3.1.1 coincideix amb el pendent a_1 calculat en aquesta secció. En efecte, dividint per n^2 numerador i denominador de a_1 tenim, recordant que $\sigma_x^2 = \overline{x_2} - \overline{x}^2$,

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\dfrac{\sum x_i y_i}{n} - \dfrac{\sum x_i}{n}\dfrac{\sum y_i}{n}}{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_i}{n}\right)^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x^2} = m,$$

segons la tercera expressió de m donada en la secció 3.1.1.

3.1.3. Covariància cov(x, y) i coeficient de correlació r(x, y)

Per començar, convé notar que la covariància és simètrica, és a dir, $cov(y,x) = cov(x,y)$. Si les dades estan totes en una mateixa vertical o bé en una mateixa horitzontal, és fàcil veure que $cov(y,x) = 0 = cov(x,y)$.

Ara cal justificar les dues expressions d'aquest paràmetre que apareixen a la fórmula del coeficient de correlació $r(x,y)$ a la secció 3.1.1. Per a això, només cal comprovar la igualtat dels numeradors, ja que els denominadors són, òbviament, idèntics. I, en efecte,

$$cov(x,y) = \vec{x}.\vec{y} - n\,\overline{x}\,\overline{y} = \sum x_i y_i - n\,\overline{x}\,\overline{y} = n\,\overline{xy} - n\,\overline{x}\,\overline{y} = n(\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}),$$

mentre que

$$\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum x_i y_i - \overline{y}\sum x_i - \overline{x}\sum y_i + n\overline{x}\,\overline{y} = n(\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}).$$

Passem ara al coeficient de correlació. També per simetria tenim

$$r(y,x) = r(x,y)$$

i, en els dos casos extrems, l'horitzontal i el vertical, $r(x,y) = 0$.

Es defineix la *variació total* de y com

$$n\sigma_y^2 = \sum(y_i - \overline{y})^2.$$

Ara comprovarem que

$$\sum(y_i - \overline{y})^2 = \sum(y_i - y_i^*)^2 + \sum(y_i^* - \overline{y})^2.$$

Comencem per la identitat

$$y_i - \overline{y} = (y_i - y_i^*) + (y_i^* - \overline{y}).$$

Elevant al quadrat els dos termes i sumant per a tot *i* obtenim

$$\sum(y_i - \overline{y})^2 = \sum(y_i - y_i^*)^2 + \sum(y_i^* - \overline{y})^2 + 2S,$$

on

$$S = \sum(y_i - y_i^*)(y_i^* - \overline{y}) = \sum(y_i - a_0 - a_1x_i)(a_0 + a_1x_i - \overline{y}) =$$

$$= a_0 \sum(y_i - a_0 - a_1x_i) + a_1 \sum(y_i - a_0 - a_1x_i)x_i - \overline{y}\sum(y_i - a_0 - a_1x_i) = 0$$

aplicant les equacions (1) als coeficients de $a_0, a_1, \overline{y}$.

Així doncs, la variació total queda dividida en dos termes:

$$n\sigma_y^2 = \sum(y_i - \overline{y})^2 = \sum(y_i - y_i^*)^2 + \sum(y_i^* - \overline{y})^2.$$

El primer terme del segon membre és la *variació no explicada*, mentre que el segon terme és la *variació explicada* perquè segueix un patró de referència, cosa que no fa el primer.

El *coeficient de correlació* $r(x,y)$ es defineix com l'arrel quadrada del quocient entre la variació explicada i la variació total, amb signe positiu o negatiu segons el signe del pendent *m* de la recta de regressió. Simbòlicament:

$$r(x,y) = \pm\sqrt{\frac{\sum(y_i^* - \overline{y})^2}{\sum(y_i - \overline{y})^2}}\,.$$

Aquesta és una definició raonada de $r(x,y)$. Haurem de comprovar que aquesta expressió és equivalent a la de $r(x,y)$ que apareix a la secció 3.1.1. Abans, observem que $r(x,y) \in [-1,1]$ i que, com a casos particulars extrems: (a) si la variació explicada és nul·la, $r(x,y) = 0$; (b) si la variació no explicada és nul·la, $r(x,y) = \pm 1$.

Fem la comprovació anunciada. De l'equació de la recta de regressió tenim

$$y_i^* - \overline{y} = a_1(x_i - \overline{x}).$$

Per tant,

$$r^2(x,y) = \frac{\sum(y_i^* - \overline{y})^2}{\sum(y_i - \overline{y})^2} = \frac{a_1^2 \sum(x_i - \overline{x})^2}{\sum(y_i - \overline{y})^2}.$$

Ara bé, segons la quarta expressió del pendent m en la secció 3.1.1,

$$a_1 = m = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2} .$$

Substituint a l'equació prèvia i simplificant un factor $\sum(x_i - \overline{x})^2$ resulta

$$r^2(x,y) = \frac{\left[\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right]^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2 \sum(y_i - \overline{y})^2}$$

i, en definitiva,

$$r(x,y) = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \overline{x})^2 \sum(y_i - \overline{y})^2}} .$$

El signe $\pm$ ja va incorporat al numerador d'aquesta expressió.

Considerem finalment la *covariància per capita*

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n} .$$

Aleshores en resulta una expressió simplificada del coeficient de correlació:

$$r(x,y) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} .$$

També el pendent m de la recta de regressió de y sobre x admet expressions més simples:

$$m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r(x,y)\frac{\sigma_y}{\sigma_x} .$$

Si els punts de la distribució no estan tampoc en una mateixa horitzontal, pensem en la recta de regressió de x sobre y, que és anàloga *mutatis mutandis* a la de y sobre x que hem estat considerant exclusivament fins ara, i escrivim

$$x - \overline{x} = m'(y - \overline{y}).$$

És obvi que

$$m' = r(x,y)\frac{\sigma_x}{\sigma_y} ,$$

i, per tant,

$$m\, m' = r(x,y)^2,$$

expressió que es podria adoptar com a definició del coeficient de correlació. En particular, si les dues rectes de regressió coincideixen, $m = m'$, hi ha una correlació lineal perfecta i, per tant, $r(x,y) = 1$. En canvi, si $r(x,y) = 0$, les rectes de regressió són perpendiculars. Es pot interpretar que, en general, el coeficient de correlació ve a ser una mesura de l'angle α que formen les dues rectes, encara que la relació no és senzilla (lineal):

$$\tan(\alpha) = \frac{m - m'}{1 + m\, m'} = \frac{r}{1 + r^2}\frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_x \sigma_y}.$$

3.2. Distribucions tridimensionals

Per completar aquest resum teòric considerarem el cas d'una distribució amb tres variables. Tenim, doncs, tres *sèries de dades* amb n termes cada una: $\vec{X} = (X_1,X_2,\ldots,X_n)$, $\vec{Y} = (Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ i $\vec{Z} = (Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)$. Considerades conjuntament, formen una *distribució tridimensional*. L'única restricció que imposarem d'entrada és que els punts (X_i,Y_i,Z_i) no es trobin tots en una mateixa vertical (paral·lela a l'eix Z), perquè en aquest cas no tindria sentit establir una relació de Z com a funció de X i Y.

Les *mitjanes aritmètiques* $\overline{X}$, $\overline{Y}$ i $\overline{Z}$ es defineixen com en el cas bidimensional.[2] El punt $(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})$ serà el *centre de gravetat* de la distribució. Reservarem les corresponents lletres minúscules x, y i z per a les *variables normalitzades*, que són les desviacions de les variables originals respecte a les seves mitjanes aritmètiques:

$$x = X - \overline{X}, \quad y = Y - \overline{Y} \quad \text{i} \quad z = Z - \overline{Z}.$$

També es defineixen com en el cas bidimensional les *desviacions típiques* σ_X, σ_Y i σ_Z, determinades per les respectives *variàncies*. I segueix tenint validesa que cada variància és «la mitjana dels quadrats menys el quadrat de la mitjana». Val la pena remarcar tres punts de fàcil comprovació: (a) la mitjana aritmètica de les variables normalitzades és nul·la, és a dir, $\sum x_i = \sum y_i = \sum z_i = 0$; (b) les seves desviacions típiques coincideixen amb les de les variables originals, $\sigma_x = \sigma_X$, $\sigma_y = \sigma_Y$ i $\sigma_z = \sigma_Z$; (c) el coeficient de correlació de dues qualssevol d'aquestes variables coincideix amb el de les seves variables normalitzades, per exemple, $r(X,Y) = r(x,y)$. Tot això, que també era vàlid en el cas bidimensional, serà d'utilitat aquí per alleugerir la notació en alguns moments.

Ens ocuparem ara d'estudiar tres conceptes principals: (a) el de *pla de regressió lineal* de la distribució tridimensional, que descriu, si existeix, la dependència aproximadament lineal d'una de les variables (escollirem la Z) en funció de les altres dues (X i Y) i es basa en el *principi dels mínims quadrats*; (b) l'*error quadràtic* que dona aquest pla d'equació $Z = f(X,Y)$ quan fem

2. $\sum$ seguirà significant sempre $\sum_{i=1}^{n}$.

servir aquesta funció per estimar valors de Z a partir de valors de X i Y; i (c) el *coeficient de correlació (global)* que mesura la qualitat de la dependència donada per la funció lineal f.

El *pla de regressió lineal* serà de la forma

$$Z = aX + bY + c. \tag{3}$$

Les constants a,b,c són els *coeficients de regressió parcial*. La situació ideal (dependència lineal perfecta) es donaria si

$$Z_i = aX_i + bY_i + c \quad \text{per a } i = 1,2,\ldots,n.$$

Introduint les variables normalitzades x,y,z, l'equació (3) passa a ser

$$z = ax + by.$$

Seguint un procés similar al del cas bidimensional, partim de

$$z_i = ax_i + by_i. \tag{4}$$

Multiplicant ara l'equació (4) separadament, primer per x_i i després per y_i, i sumant en cada cas terme a terme, obtenim

$$\begin{cases} \sum z_i x_i = a \sum x_i^2 + b \sum x_i y_i, \\ \\ \sum z_i y_i = a \sum x_i y_i + b \sum y_i^2, \end{cases} \tag{5}$$

que és el sistema d'equacions lineals que determina els coeficients a,b.[3] Escrit matricialment és:

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum z_i x_i \\ \sum z_i y_i \end{pmatrix}.$$

Aplicant, per exemple, la regla de Cramer, la solució del sistema dona

$$a = \frac{\sum z_i x_i \sum y_i^2 - \sum z_i y_i \sum x_i y_i}{\sum x_i^2 \sum y_i^2 - (\sum x_i y_i)^2} \quad \text{i} \quad b = \frac{\sum z_i x_i \sum x_i^2 - \sum z_i x_i \sum x_i y_i}{\sum x_i^2 \sum y_i^2 - (\sum x_i y_i)^2}.$$

3. El sistema equivalent amb les variables originals és

$$\sum Z_i = a \sum X_i + b \sum Y_i + cn,$$

$$\sum Z_i X_i = a \sum X_i^2 + b \sum X_i Y_i + c \sum X_i,$$

$$\sum Z_i Y_i = a \sum X_i Y_i + b \sum Y_i^2 + c \sum Y_i.$$

El tractament teòric d'aquest sistema és força més complicat que el del sistema (5).

Aleshores, l'*equació del pla de regressió de Z sobre X i Y* és

$$Z - \overline{Z} = a(X - \overline{X}) + b(Y - \overline{Y}).$$

Nota. Tanmateix, és convenient indicar que, en un exemple numèric, és millor preparar una taula numèrica amb les dades originals i els càlculs addicionals necessaris i resoldre el sistema detallat en la nota 4, per obtenir l'equació del pla amb la forma

$$Z = aX + bY + c.$$

D'aquesta manera reduïm els petits errors que indefectiblement impliquen les aproximacions. També arrosseguem errors si introduïm els anomenats *coeficients de correlació binària*, que són els coeficients de correlació de les tres distribucions bidimensionals subjacents a la tridimensional que estem considerant:

$$r(X,Y) = r(x,y), \quad r(X,Z) = r(x,z) \quad \text{i} \quad r(Y,Z) = r(y,z).$$

Després de tenir en compte les relacions

$$\sum x_i^2 = n\sigma_x^2, \quad \sum y_i^2 = n\sigma_y^2 \quad \text{i} \quad \sum x_i y_i = n\sigma_x\sigma_y r(x,y)$$

i, anàlogament,

$$\sum x_i z_i = n\sigma_x\sigma_z r(x,z) \quad \text{i} \quad \sum y_i z_i = n\sigma_y\sigma_z r(y,z),$$

i simplificar alguns termes, és cert que les equacions (5) queden

$$a\sigma_x + b\sigma_y r(x,y) = \sigma_z r(x,z)$$

$$a\sigma_x r(x,y) + b\sigma_y = \sigma_z r(y,z),$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y r(x,y) \\ \sigma_x r(x,y) & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sigma_z \begin{pmatrix} r(x,z) \\ r(y,z) \end{pmatrix}.$$

Aplicant la regla de Cramer obtenim les expressions de a,b i, com a *equació del pla de regressió de z sobre x i y*,[4]

$$\frac{z}{\sigma_z} = \frac{r(x,z) - r(x,y)r(y,z)}{1 - r(x,y)^2}\frac{x}{\sigma_x} + \frac{r(y,z) - r(x,y)r(x,z)}{1 - r(x,y)^2}\frac{y}{\sigma_y}.$$

4. És fàcil veure que, eliminant per exemple la y, aquesta equació es redueix a

$$\frac{z}{\sigma_z} = r(x,z)\frac{x}{\sigma_x},$$

que és l'equació de la recta de regressió bidimensional de z sobre x.

No obstant l'aspecte agradable i simètric d'aquesta equació, els coeficients de correlació binària que hi apareixen arrosseguen errors d'aproximació pel seu propi càlcul, i per tornar a les variables originals del problema cal, a més, introduir les mitjanes aritmètiques. Per això en la nota de més amunt s'ha inclòs el comentari sobre els exemples numèrics.

L'*error quadràtic* ε de Z sobre X i Y es defineix per

$$\varepsilon_Z(X,Y) = \sqrt{\sum (Z_i - Z_i^*)^2}, \quad \text{on} \quad Z_i^* = \overline{Z} + a(X_i - \overline{X}) + b(Y_i - \overline{Y}) \quad \text{per a cada} \quad (X_i, Y_i).$$

Tanmateix, és més habitual considerar l'*error típic de l'estima*, que ve a ser un *error per capita* i és donat per

$$\varepsilon_Z^0(X,Y) = \sqrt{\frac{\sum (Z_i - Z_i^*)^2}{n}}.$$

El *coeficient de correlació múltiple* $R_Z(X,Y)$ de la distribució tridimensional es defineix com

$$R_Z(X,Y) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_Z^0(X,Y)^2}{\sigma_Z^2}}.$$

Aquest coeficient de correlació múltiple sempre varia entre 0 i 1. Com més s'acosta a 1, millor és la relació lineal entre les variables. Com més s'acosta a 0, la relació lineal és pitjor. Si el coeficient és 1, la relació lineal és perfecta. Si és 0, no hi ha relació lineal però n'hi pot haver d'un altre tipus. (Hi ha expressions alternatives d'aquests dos nous paràmetres en termes dels coeficients de correlació binària que, per les raons ja explicades, no farem servir.)

4. Exemple: sudokus

Ens plantegem donar resposta a la qüestió següent: hi ha relació entre el nombre de dades d'un sudoku i el seu grau de dificultat expressat numèricament?

Un de nosaltres va tenir ocasió de resoldre els 108 sudokus d'un quadern publicat per Edigrama el 2021, on els graus de dificultat anunciats eren: *** (16 problemes), **** (46 problemes) o ***** (46 problemes). Els va completar en, aproximadament, un mes. Un d'ells era l'exemple de la figura 1 (secció 2) i tots tenien el mateix tipus de simetria horitzontal i vertical.

Després de resoldre cada sudoku, va valorar-ne la dificultat, segons aquestes opcions: F (fàcil), R (regular), D (difícil) i D^* (molt difícil). Són els *graus de dificultat*, en sentit creixent. Evidentment, aquesta valoració també és subjectiva. De fet, es va observar que, sovint, la dificultat també depèn una mica de la «lucidesa» de qui intenta resoldre el sudoku en el moment de trobar la solució, i això també és lògic. No és estrany que d'un problema que es deixa encallat a la nit, se'n trobi la solució l'endemà al matí sense excessives dificultats.

No ens aturarem a explicar la diferència entre 'difícil' i 'molt difícil', però és cert que és notable. Per tant, a l'hora de quantificar els quatre graus, l'assignació ha estat: $F = 1$, $R = 2$, $D = 3$ i $D^* = 5$. Aquí també hi ha subjectivitat, és clar.

Vegem en la taula 1 la graella de freqüències. La variable *x* descriu les dades de cada sudoku, des de 21 fins a 31, mentre que la variable *y* descriu el grau de dificultat. Dins de cada cel·la hi ha la freqüència de cada parell (dades, grau). Fins aquí arriba la descripció de la part empírica, és a dir, els resultats de l'experiment.

Taula 1. Freqüències de cada parell (dades, grau de dificultat).

$y \downarrow x \rightarrow$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	sumes
$D^* = 5$				1		1		1				3
$D = 3$			1		4	1		1				7
$R = 2$	1		3	1	5	9	5	3				27
$F = 1$				5	8	12	20	18	2	2	4	71
sumes	1		4	7	17	23	25	23	2	2	4	108

Per exemple, dels 25 sudokus amb $x = 27$ dades, n'hi ha 20 que són fàcils ($F = 1$) i 5 de regulars ($R = 2$).

Passem ara a la part analítica. Es tracta de comprovar si 'menys dades, més difícil' és una hipòtesi plausible i quina és la recta de regressió lineal de *y* sobre *x*, és a dir, si es pot preveure amb certa aproximació el grau de dificultat d'un sudoku a partir de les seves dades. Amb aquest objectiu hem estudiat la distribució bidimensional *x,y*.

Els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació* $r = r(x,y)$ entre dues variables, que sempre està a l'interval $[-1,1]$, dona aquí $r = -0{,}29$. Significa que hi ha poca correlació entre *y* i *x*, i el signe negatiu indica que, molt *grosso modo*, com més dades, menys dificultat.
- La *recta de regressió de y sobre x* dona $y = 5{,}20 - 0{,}14x$. Es pot veure representada en el diagrama de la figura 2. Com està previst, passa pel centre de gravetat $(\overline{x},\overline{y}) = (26{,}53,\ 1{,}49)$.
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 8{,}383$. Més interessant sembla l'*error quadràtic per capita* ε_0, que reparteix equitativament l'error total entre tots els sudokus estudiats i dona $\varepsilon_0 = 0{,}078$ de mitjana per a cada un.

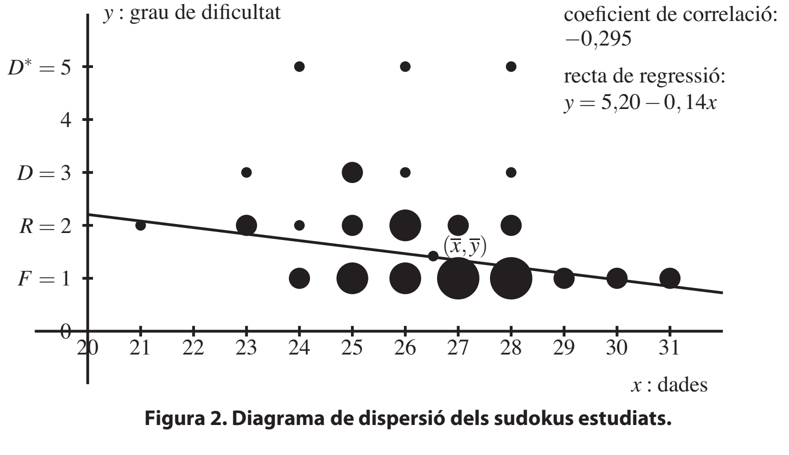


Figura 2. Diagrama de dispersió dels sudokus estudiats.

La figura 2 ens dona el *diagrama de dispersió* de l'experiment. Cal advertir que el gruix de cada cercle és aproximadament proporcional a la freqüència de la parella (dades, grau) corresponent. Es pot observar que la recta de regressió decreix i travessa el nucli de la distribució. A la secció següent compararem aquests resultats amb els que s'obtenen en un cas totalment diferent.

5. Exemple: venda amb targetes de crèdit

El 2008 es va inaugurar una farmàcia en un barri modest de la tercera ciutat catalana. El «farmacèutic consort», amic nostre, va rebre diversos encàrrecs i ens en va parlar recentment: un d'ells era revisar cada dia els tiquets dels pagaments amb targeta fets pels clients, per comprovar si el banc abonava l'import net corresponent després de quedar—se la comissió del 0,3 % sobre l'import brut. Des de l'inici de la pandèmia feia aquesta feina no a diari sinó un cop per setmana, cosa que suposava comptar cada vegada 6 feixos de targetes (de dilluns a dissabte, llevat dels festius).

Després de 14 anys, segons va explicar, deu haver revisat milers de tiquets, però mai no els havia comptat. L'any 2021 es va decidir a fer—ho: disposa, doncs, per a cada mes del 2021, del nombre de compres fetes amb targeta i l'import total net. Total: 4.400 targetes. La sensació aproximada que té és que «com més targetes hi ha, més puja l'import total», encara que aquesta no és una regla rígida. Com podríem comprovar amb les seves dades quin grau de validesa té la seva sensació intuïtiva?

Tenim dues sèries de *dades*, cada una amb 12 components: *el nombre de targetes de cada mes* i *l'import total net mensual*. Són valoracions objectives. Tanmateix, l'experiment queda condicionat per molts factors: l'emplaçament de la farmàcia, el tipus de clientela que té, l'elecció que fa cada client entre pagar en efectiu o amb targeta, l'efecte de la pandèmia, etc. I només tenim les dades d'un any, mes per mes. Per tant, els resultats difícilment serien extrapolables, no només a altres farmàcies sinó fins i tot a altres anys d'aquesta.

La taula 2 ens dona les dades de la distribució bidimensional que estudiarem.

Taula 2. Nombre mensual de targetes de crèdit i imports nets corresponents.

mes	gener	febrer	març	abril	maig	juny
targetes (x)	294	321	419	361	376	371
import (y)	4.261,83	3.983,60	5.713,97	4.802,22	5.624,81	5.561,59

mes	juliol	agost	setembre	octubre	novembre	desembre
targetes (x)	366	281	344	420	381	466
import (y)	5.452,62	4.070,60	5.136,48	5.196,56	4.575,67	6.612,53

El nombre de targetes (x) és una quantitat de tres xifres, mentre que l'import en euros (y) ve donat amb quatre xifres i dos decimals. Aquesta diferència fa que el diagrama de dispersió hagi de tenir a l'eix de les y una escala diferent que a l'eix de les x.

Passem ara a la part analítica. Volem comprovar si «com més targetes, més import net total» era una hipòtesi plausible i quina era la recta de regressió lineal de *y* sobre *x*, és a dir, si es podia preveure amb certa aproximació l'import mensual a partir del nombre de targetes.

Els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació r* entre dues variables, que sempre està a l'interval $[-1{,}1]$, dona aquí $r = 0{,}85$. Significa que hi ha una correlació positiva notable entre *y* i *x*, cosa que *grosso modo* confirma la intuïció del nostre amic.
- La *recta de regressió de y sobre x* dóna $y = 12{,}5x + 500$. Es pot veure representada en el diagrama de dispersió de la figura 3.
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 1{,}346{,}20$ i l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 =$ 112,18 de mitjana per a cada mes. Aquest és un error notable a primera vista, és a dir, en termes absoluts, però cal tenir en compte el rang dels valors de *y*.

La figura 3 dona el *diagrama de dispersió* de l'experiment. Es pot observar que la recta de regressió creix i s'acosta força a la majoria dels 12 punts $(x{,}y)$. El número que acompanya cada punt en aquesta figura representa el mes corresponent.

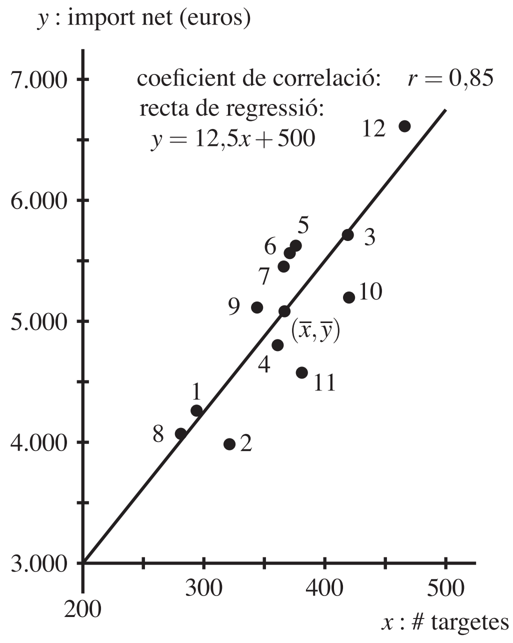


Figura 3. Diagrama de dispersió de les vendes amb targeta.

Comparem els resultats d'aquest estudi de les targetes amb els dels sudokus. En el cas dels sudokus, la correlació $r = -0{,}29$ és baixa en termes absoluts, és a dir, obviant el signe, i l'error per capita també és «petit»; en canvi, per a les targetes, la correlació $r = 0{,}85$ és força alta i l'error per capita també és «molt gran». Tanmateix, la recta de regressió per a les targetes sembla més ajustada a les dades que la dels sudokus. El motiu d'aquesta contradicció aparent és que el rang de les *y* és $[1{,}5]$ per als sudokus i aproximadament $[3{,}983\,,\,6{,}612]$ per a les targetes. Introduïm un segon factor de normalització, l'error per capita normalitzat $\varepsilon_0^* = \varepsilon_0/\overline{y}$, definit al final de la secció 3.1.1. La taula 3 compara tots els valors rellevants.

Taula 3. Comparació amb l'exemple dels sudokus.

	error quadràtic	error per capita	mitjana de les *y*	error normalitzat
	ε	ε_0	$\overline{y}$	ε_0^*
sudokus	8,383	0,078	1,49	0,0523
targetes	1.346,20	112,18	5.082,71	0,0221

Ara es veu clar que, adequant en cada cas l'error per capita al rang de les *y* (o, equivalentment, a l'entorn de la mitjana aritmètica de les *y*), l'error per capita normalitzat de les targetes és bastant menor que el dels sudokus, com suggereixen les gràfiques de les rectes de regressió respectives. Sembla, doncs, que aquest últim paràmetre reflecteix millor els diagrames de dispersió. La diferència encara seria més gran prenent com a paràmetre $\varepsilon/\overline{y}$: donaria 5,6226 per als sudokus i 0,2649 per a les targetes.

6. Exemple: venda lliure

Un dels paràmetres importants per a la valoració d'una farmàcia (per exemple, a l'hora d'una compravenda) és la proporció que presenta de venda lliure (des d'ara, VLL) en el total d'ingressos. Els preus de la VLL no estan regulats (d'aquí ve el qualificatiu): cada farmàcia els decideix i pot modificar—los en tot moment, encara que hi ha una certa uniformitat, sobretot entre farmàcies pròximes.

Els supermercats tenen productes que també es venen a les farmàcies (parafarmàcia, per exemple) i poden oferir—los a preus inferiors perquè compren més a l'engròs. Fins al punt que algunes farmàcies, després d'indagar en els supermercats pròxims, acaben venent al mateix preu o amb pèrdues alguns d'aquests productes per no deixar escapar clients.

Hi ha tres emplaçaments típics per a una farmàcia: a prop d'un centre d'atenció primària (CAP), cèntrica o en una barriada. Les farmàcies pròximes a un CAP despatxen moltes receptes, com és lògic; les cèntriques tenen una alta VLL, fins i tot superior a les receptes del Sistema Català de Salut (des d'ara, SCS); finalment, les farmàcies de barriada no destaquen per la VLL.

El nostre objectiu és l'estudi de la relació entre l'import total que paga el SCS i el de la VLL. Ens cenyirem a les dades mensuals del 2021 de la mateixa farmàcia de l'exemple 5.

Tenim, doncs, dues sèries de *dades*, cada una amb 12 components mensuals: *l'abonament del SCS* i *l'import de la VLL*. La taula 4 ens dona les dades de la distribució bidimensional que estudiarem.

Taula 4. Dades del SCS i de la VLL.

mes	gener	febrer	març	abril	maig	juny
SCS (x)	37.763,17	34.490,70	42.904,53	36.429,43	40.741,81	44.417,78
VLL (y)	8.202,35	8.092,48	9.443,87	8.926,15	9.156,85	9.620,87

mes	juliol	agost	setembre	octubre	novembre	desembre
SCS (x)	39.931,27	37.189,63	41.038,80	39.765,75	42.393,33	41.965,91
VLL (y)	9.797,36	7.252,55	9.282,99	9.825,66	8.400,31	12.010,76

Encara que els imports del SCS tenen cinc xifres enteres i dos decimals, mentre que la majoria dels de la VLL són de quatre xifres enteres i els rangs de les variables són diferents, en el diagrama de dispersió l'escala de l'eix de les y serà la mateixa que a l'eix de les x. Com a la figura 3, l'artifici per no desaprofitar espai ha consistit a situar l'origen dels eixos en el punt (34,7).

Passem ara a la part analítica. Volem veure si hi ha una bona relació entre les dues sèries de dades i quina és la recta de regressió de y sobre x.

Els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació r* entre dues variables, que sempre està a l'interval $[-1,1]$, dona aquí $r = 0{,}5396$. Per tant, la VLL està només relativament relacionada amb els pagaments del SCS.
- El *centre de gravetat* de la distribució és el punt $(\overline{x},\overline{y})$ =(39.914,34, 9.167,68).
- L'equació de la *recta de regressió de y sobre x* és $y = 0{,}2186x + 442{,}6184$.
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 3{,}326{,}34$, l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 = 277{,}19$ de mitjana per a cada mes i l'*error normalitzat* és $\varepsilon_0^* = 0{,}0302$. Aquest últim està comprès entre el de les targetes (0,0221) i el dels sudokus (0,0527).

La figura 4 dona el *diagrama de dispersió* de l'experiment. La recta de regressió creix lentament i es distancia de la meitat dels 12 punts (x,y). També hi ha marcada amb traç discontinu la poligonal que va unint successivament, seguint l'ordre de les x creixents, els punts de la distribució (el número al costat de cada punt indica el mes de l'any). Pensem que la singular posició del punt 12 s'explica perquè al desembre la gent incrementa la compra de productes de venda lliure com a regals típics de l'època. En canvi, la baixa proporció de venda lliure dels mesos d'agost i novembre és deguda, respectivament, a les vacances d'estiu i al *black friday*, que no es practica a les farmàcies.

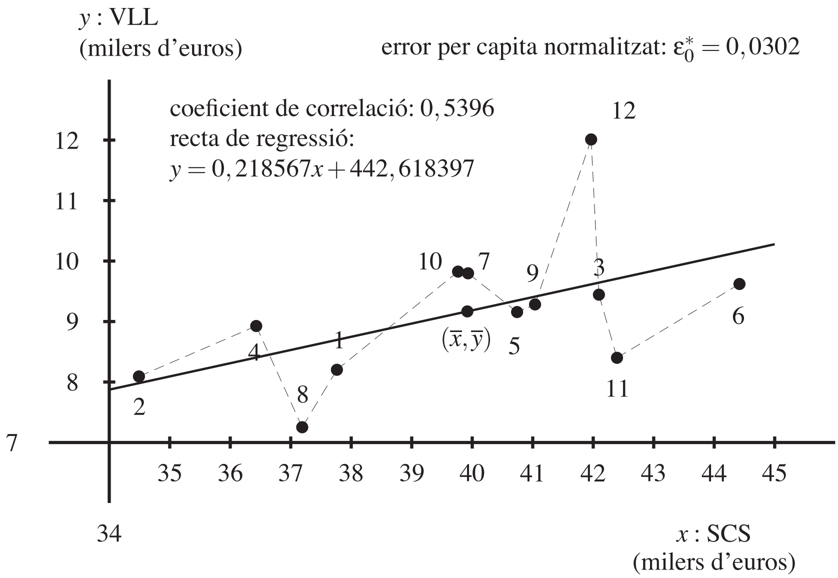


Figura 4. Diagrama de dispersió de la VLL vs. el SCS.

7. Exemple: futbol de la Primera Divisió espanyola

La Primera Divisió del Campionat de Lliga d'Espanya la formen 20 equips. Durant la primera volta, cada jornada es juguen, doncs, 10 partits, cada un al camp d'un dels dos contrincants. A la segona volta fan el mateix però al camp de l'altre. Per tant, en total hi ha 38 jornades, 19 a la primera volta i 19 més a la segona. Quan un equip guanya a un altre, el primer rep 3 punts i el segon 0. Si empaten, reben 1 punt cada un.

Els quatre primers classificats jugaran la Champions League la temporada següent; el cinquè i el sisè jugaran l'Europa League. A l'altre extrem, els tres darrers classificats baixen a la Segona Divisió la temporada següent; els substituiran els tres primers classificats d'aquesta divisió (els dos primers directament, mentre que el tercer surt d'eliminatòries entre els quatre següents, els que ocupen les posicions tercera, quarta, cinquena i sisena).

Com és lògic, els resultats de cada equip a la segona volta solen ser diferents dels de la primera volta. L'objectiu d'aquest estudi és analitzar els comportaments a la primera i la segona volta. Prendrem les dades de la temporada 2020—2021 i ens fixarem només en els equips més forts d'una banda i en els més dèbils de l'altra. Els primers estan interessats a quedar en els «llocs europeus»; els segons, a fugir dels tres llocs més baixos de la classificació final.

De millor a pitjor, en acabar la primera volta els equips més forts van ser els següents: Atlético de Madrid, Real Madrid, Barcelona, Sevilla, Villarreal, Real Sociedad, Granada i Betis. El Villarreal tenia garantit l'accés a la Champions League perquè havia guanyat l'Europa League la temporada anterior 2019—2020 (norma europea). També de millor a pitjor, a meitat de temporada els equips més dèbils van ser els següents: Getafe, Athletic de Bilbao, Valencia, Eibar, Valladolid, Alavés, Elche, Osasuna i Huesca. En tots dos casos, al final de la competició hi va haver alguns canvis d'ordre.

La doble taula 5 ens dona la puntuació de cada equip en acabar la primera volta (jornada 19) i al final de la temporada (jornada 38). Això ens donarà les dades *x,y* de la distribució bidimensional que estudiarem, primer per als equips forts i després per als dèbils. Per raons d'espai, hem abreujat els noms d'alguns equips.

Taula 5. Puntuacions a mig campionat (jornada 19) i al final (jornada 38).

equip	AMadrid	RMadrid	Barça	Sevilla	Villa	RSoc	Grana	Betis
J 19 (*x*)	48	40	37	36	33	30	28	26
J 38 (*y*)	86	84	79	77	58	62	46	61

equip	Geta	AthB	Valen	Eibar	Valla	Alav	Elche	Osasu	Huesca
J 19 (*x*)	23	21	20	19	19	18	17	16	12
J 38 (*y*)	38	46	43	30	31	38	36	44	34

Amb aquestes dades ja es veuen diferències de comportament notables entre els equips. A la meitat del campionat, els cinc primers tenien plaça per a la Champions League, i el sisè i el setè, per a l'Europa League, però no hi havia res definitiu. Quedaven molts punts per disputar. El Betis, per exemple, podia aspirar a anar a l'Europa League.

A la banda baixa, també tot podia canviar. De moment estaven en risc Elche, Osasuna i Huesca, però també perillaven Alavés, Valladolid, Eibar, Valencia... Degut a les diferències entre el rang de variació de *x* i el de *y* en tots dos casos, l'escala per a la *y* serà diferent de la de la *x* en els diagrames corresponents inclosos més avall.

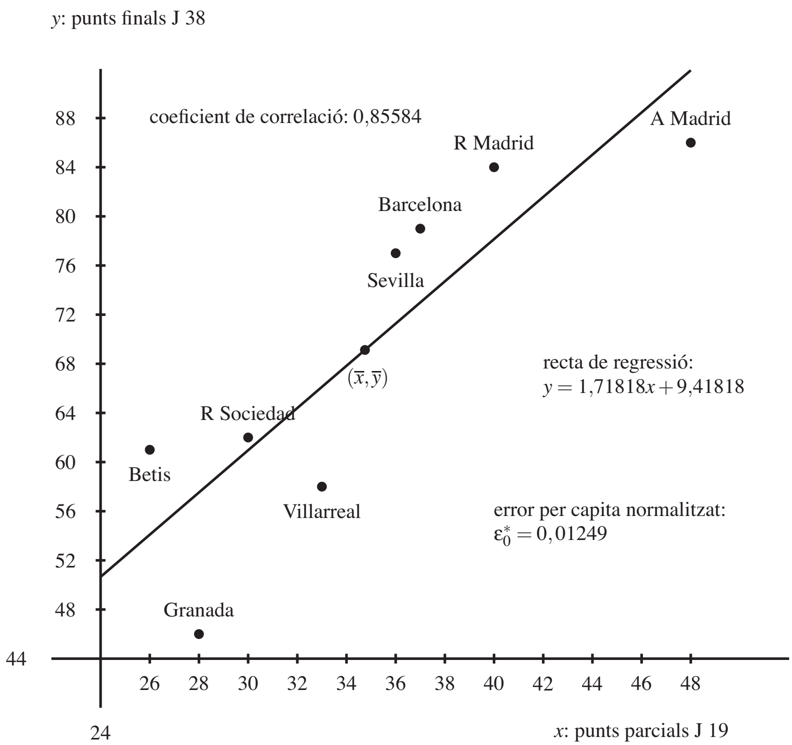


Figura 5. Diagrama de dispersió dels equips amb aspiracions europees.

Passem ara a la part analítica. Hem estudiat en els dos casos la distribució bidimensional *x,y*. En primer lloc considerem el grup dels equips forts. Els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació r* entre dues variables, que sempre està a l'interval $[-1,1]$, dona aquí $r = 0{,}85584$. Significa que hi ha molta correlació entre *y* i *x*. És a dir, els resultats de la segona volta estan, en general, en consonància amb els de la primera.
- El *centre de gravetat* de la distribució és el punt $(\overline{x},\overline{y}) = (34{,}75,\ 69{,}13)$.
- La *recta de regressió de y sobre x* dóna $y = 1{,}71818x + 9{,}41818$. Es pot veure representada en el primer diagrama de dispersió (figura 5).
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 6{,}90909$, l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 = 0{,}86364$ de mitjana per a cada equip i l'*error normalitzat* és $\varepsilon_0^* = 0{,}01249$. Aquest últim és força baix en comparació amb exemples previs.

Passem al grup d'equips dèbils. La figura 6 dona el seu diagrama de dispersió.

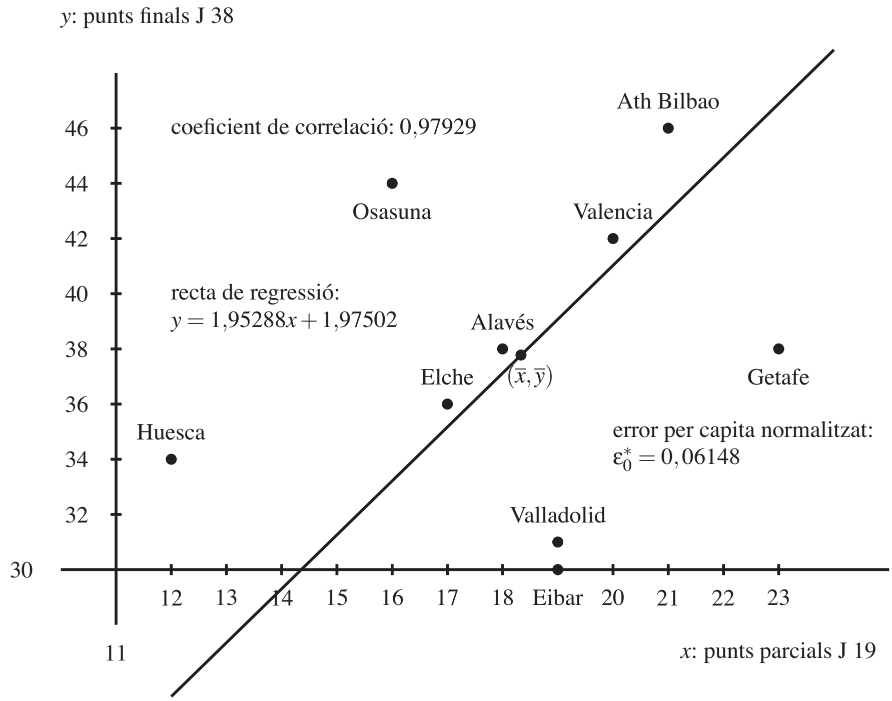


Figura 6. Diagrama de dispersió dels equips en risc de descens.

Els resultats aquí són els següents:

- El *coeficient de correlació r* entre les dues variables dona aquí $r = 0{,}97929$. Significa que encara hi ha més correlació entre *y* i *x*, és a dir, en general, entre els resultats de les dues voltes.
- El *centre de gravetat* de la distribució és el punt $(\overline{x},\overline{y}) = (18{,}33,\ 37{,}78)$.
- La *recta de regressió de y sobre x* dona $y = 1{,}95288x + 1{,}97502$. Es pot veure representada en el segon diagrama de dispersió (figura 6).

- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 20{,}90301$, l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 = 2{,}32256$ de mitjana per a cada equip i l'*error normalitzat* surt $\varepsilon_0^* = 0{,}06148$. Aquest últim també és baix en comparació amb alguns exemples previs (no pas tots).

Comparem ara els dos grups d'equips. El *coeficient de correlació*, curiosament, és més alt per als equips dèbils. Això pot ser degut que, en general, els equips forts tenen motivacions i plantilles superiors per «mantenir i superar el ritme» durant la segona volta, mentre que als dèbils els passa més aviat el contrari. Tot i així, els dos *centres de gravetat* comparteixen la propietat que la segona component (mitjana de puntuacions finals) és el doble de la primera (mitjana de la primera volta).

En relació amb la *recta de regressió*, cinc equips forts estan per sobre, i això significa que s'han esforçat més a la segona volta, mentre que els altres tres han perdut pistonada. Analitzats individualment, l'Atlético de Madrid no ha fet gaire els deures i ha acabat campió molt justet. Real Madrid, Barcelona i Sevilla han perseverat i han mantingut el seu ordre particular. Els quatre s'han classificat per a la Champions League. La Real Sociedad i el Betis també han apretat i s'han classificat per a l'Europa League, superant el Villarreal, que s'ha relaxat perquè tenia la Champions garantida per norma de la UEFA. El Granada és el que menys esforç ha fet i ha quedat desbancat pel Betis.

Entre els dèbils, sis s'han esforçat i els altres tres no. Aquests són el Getafe, que s'ha vist superat per l'Athletic i el Valencia, i sobretot el Valladolid i l'Eibar, que cauen a Segona Divisió juntament amb l'Huesca, que ha fet un esforç gran però ìnsuficient perquè venia de molt avall. Dels altres sis, a banda dels ja comentats, l'Alavés ha igualat el Getafe, mentre que Elche i Osasuna han sortit del pou.

Finalment, els *errors quadràtic* i *per capita* dels equips dèbils són el triple dels corresponents als forts, mentre que l'*error normalitzat* és sis vegades superior. Això indica que més de la meitat dels equips dèbils s'han desviat molt de la recta de regressió, mentre que entre els forts només el Granada ha quedat clarament lluny de la recta.

Com a comentari final, destaca la regularitat i l'estabilitat a la part alta de la taula (equips forts) i la manca d'aquestes propietats a la part baixa (equips dèbils), amb el canvi (dramàtic) dels dos equips que al final acompanyen l'Huesca a Segona Divisió. Hi ha trets comuns, com ara que en els dos centres de gravetat la segona coordenada dobla la primera: això és bo per als forts i dolent per als dèbils, que haurien hagut de millorar durant la segona volta. El coeficient de correlació és alt en ambdós casos, però té significat positiu per als forts i negatiu per als dèbils. Els tres errors quadràtics també mostren que els equips forts han estat més consistents, mentre que els dèbils s'allunyen molt més, a la baixa, d'un comportament regular.

8. Exemple: qualificacions acadèmiques

A l'Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual, ubicada en el Campus de Terrassa de la UPC, hi ha dos graus d'Aeronàutica: el grau en Enginyeria en Tècniques Aeroespacials (GRETA) i el grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials (GREVA). Tant en l'un com en l'altre hi ha tres assignatures de matemàtiques en els dos quadrimestres inicials:

Àlgebra i Càlcul I durant el primer (tardor) i Càlcul II durant el segon (primavera). No hi ha establerts prerequisits entre elles.

L'objecte d'aquest estudi és la possible relació entre les notes finals de les tres assignatures. Ens centrarem en el GREVA i, més concretament, en les notes obtingudes pels estudiants durant els quadrimestres de la tardor de 2016 i de la primavera de 2017. Els dos professors que van impartir aquestes tres assignatures tenien criteris de qualificació semblants.

A les actes finals consten 62 estudiants matriculats tant d'Àlgebra com de Càlcul I, quatre dels quals no es van presentar a Àlgebra però sí a Càlcul I, mentre que dos d'aquests quatre i un tercer no surten a l'acta de Càlcul II, que, per tant, tenia 59 matriculats. D'entrada, assignarem un 0 en una assignatura a cada estudiant no matriculat o no presentat (d'ara endavant, NP, genèricament). Si convé, modificarem aquest criteri durant l'estudi.

En la primera part de l'estudi mirarem de relacionar les assignatures per parelles i. per tant, hi haurà tres parts: Àlgebra vs. Càlcul I, Àlgebra vs. Càlcul II, i Càlcul I vs. Càlcul II. En principi, a la vista dels tres temaris no es pot dir que l'Àlgebra i el Càlcul I tinguin gaires punts de contacte, però sí que el Càlcul II fa ús de tècniques estudiades a l'Àlgebra i sobretot, com és lògic, a Càlcul I. Els resultats obtinguts pels estudiants ens poden donar una idea de la seva capacitat (grupal) d'assimilació de cada matèria. En una segona part analitzarem la possible relació *conjunta* de Càlcul II amb Àlgebra i Càlcul I.

Passem ara a la part analítica. Hem estudiat en els tres primers casos distribucions bidimensionals.

8.1. Àlgebra i Càlcul I

En aquest cas estudiarem la distribució bidimensional x,y, on x representa les notes d'Àlgebra i y les de Càlcul I. D'entrada, com ja ha quedat dit, seguirem el criteri d'assignar un 0 als NP, que afectarà quatre estudiants que no es van presentar a Àlgebra. En canvi, els 62 matriculats es van presentar tots a Càlcul I. Els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació* $r \in [-1,1]$ entre les dues variables dona aquí $r = 0{,}0020$. Significa que no hi ha pràcticament cap correlació entre y i x.
- El *centre de gravetat* de la distribució és el punt $(\overline{x},\overline{y}) =(6{,}6387,\ \ 5{,}7081)$. Sembla que l'Àlgebra resulta una mica més fàcil que el Càlcul I.
- La *recta de regressió de y sobre x* dona $y = 0{,}0013x + 5{,}6992$. Es pot veure representada per una línia fina en el diagrama de dispersió (figura 7); el centre de gravetat és el situat més a l'esquerra dels dos punts destacats per un cercle més gran. És gairebé horitzontal i molt poc representativa de la distribució, com augurava el valor de r.
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 12{,}5948$, l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 = 0{,}2031$ de mitjana per a cada estudiant i l'*error normalitzat* és $\varepsilon_0^* = 0{,}0356$. Aquest últim és relativament baix en comparació amb altres exemples previs on hem tractat temes diversos.

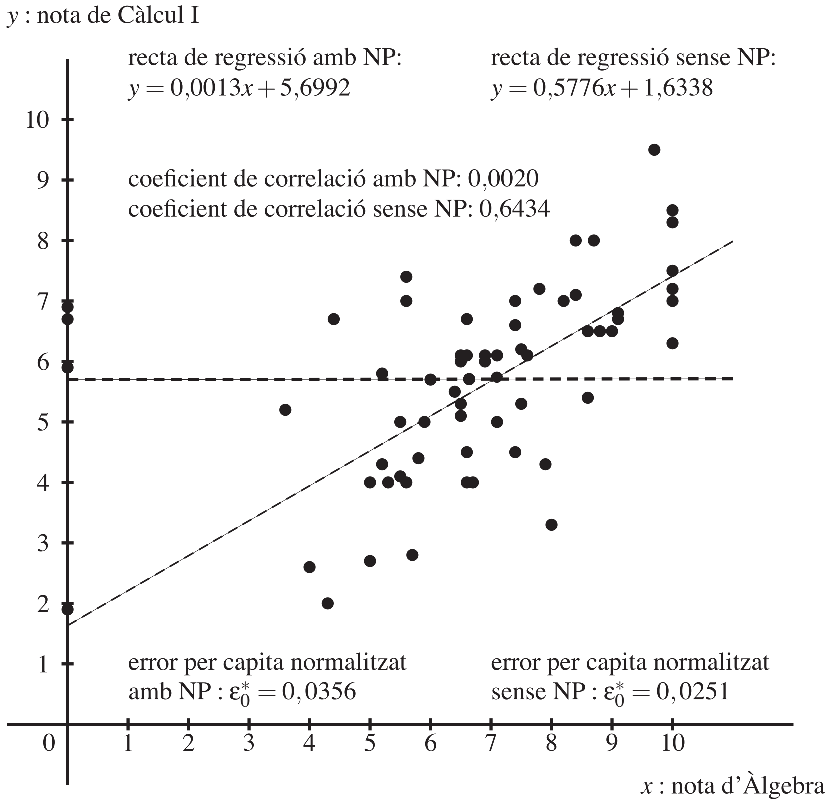


Figura 7. Diagrama de dispersió d'Àlgebra i Càlcul I.

Tanmateix, fixem—nos en els quatre NP d'Àlgebra. Els punts que els representen en el diagrama estan a l'eix *y*. Per veure quina influència té haver—los assignat un 0, hem repetit l'estudi eliminant—los de la distribució bidimensional. Llavors, el nombre de dades s'ha reduït a 58 i els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació* passa a ser $r = 0{,}6434$, que ja indica una correlació més positiva entre *y* i *x*.
- El *centre de gravetat* de la distribució és ara el punt $(\overline{x},\overline{y}) = (7{,}0966,\ 5{,}7328)$, que, lògicament, s'ha mogut cap a la dreta i lleument cap amunt perquè els quatre exclosos tenien una nota mitjana de 5,35 de Càlcul I. La nota mitjana d'Àlgebra arriba ara al notable, mentre que la de Càlcul I puja menys de tres centèsimes.
- La *recta de regressió de y sobre x* dona $y = 0{,}5776x + 1{,}6338$. Ara és clarament creixent i força adequada a l'aspecte del diagrama de punts. Es pot veure representada també en la figura 7 i el seu centre de gravetat és molt pròxim a la intersecció amb la recta anterior.
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 8{,}9367$, l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 = 0{,}1441$ de mitjana per a cada estudiant i l'*error normalitzat* és $\varepsilon_0^* = 0{,}0251$. Tots tres són menors que els de l'anàlisi anterior, i l'últim és relativament baix en comparació amb altres exercicis previs que hem dut a terme sobre temes diversos.

La conclusió sembla clara: assignar 0 als NP desvirtua fortament la descripció numèrica de la distribució bidimensional dels punts restants. En comptes de donar un altre valor numèric als NP, serà més encertat excloure'ls en els casos següents.

8.2. Àlgebra i Càlcul II

En aquest cas estudiarem la distribució bidimensional *x,y*, on *x* representa les notes d'Àlgebra i *y* les de Càlcul II. Vista l'experiència del cas 8.1, suprimirem els sis estudiants que no es van presentar a Àlgebra, a Càlcul II o a cap de les dues. Quedaran, doncs, 56 estudiants presentats a les dues assignatures. Els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació* $r \in [-1,1]$ entre les dues variables dona aquí $r = 0{,}6182$. Novament indica indica una correlació lleugerament positiva entre *y* i *x*.
- El *centre de gravetat* de la distribució és el punt $(\overline{x},\overline{y}) = (7{,}196429,\ 5{,}683929)$. La mitjana de Càlcul II és un pèl menor que la de Càlcul I trobada en el cas 8.1.
- La *recta de regressió de y sobre x* dona $y = 0{,}5679x + 1{,}5971$. És similar a la del cas 8.1 i es pot veure representada en el diagrama de dispersió (figura 8), igual que el centre de gravetat, indicat per un cercle més gran.
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 8{,}8961$, l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 = 0{,}1435$ de mitjana per a cada estudiant i l'*error normalitzat* és $\varepsilon_0^* = 0{,}0252$. Tots tres són molt semblants als del cas 8.1, però l'últim és relativament baix en comparació amb altres exercicis previs que hem dut a terme sobre temes diversos.

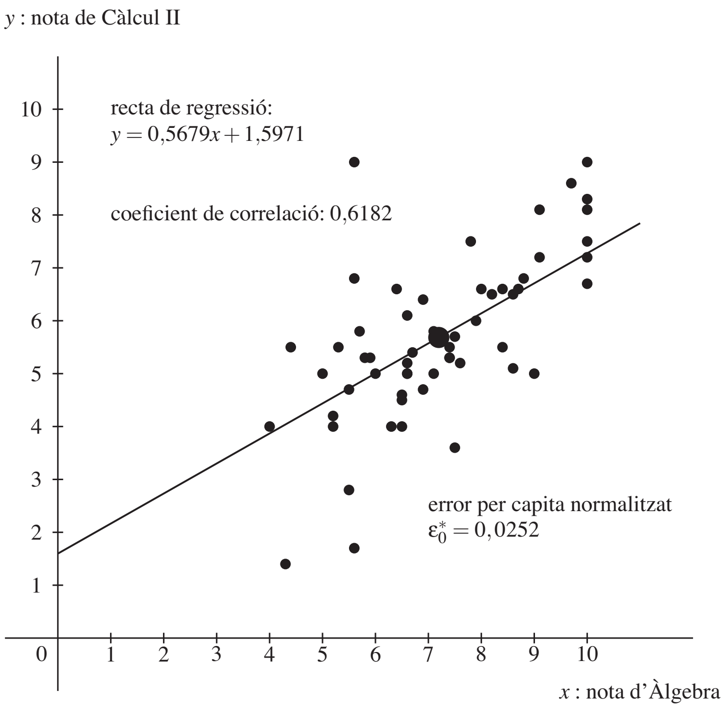


Figura 8. Diagrama de dispersió d'Àlgebra i Càlcul II.

Comparem aquests resultats amb els del cas anterior sense NP. Les relacions entre assignatures són de tipus diferent: Àlgebra i Càlcul I són *paral·leles*, és a dir, s'imparteixen simultàniament, mentre que Àlgebra i Càlcul II son *seqüencials* en el temps, amb el que això implica.

Tanmateix, els paràmetres són molt semblants en els dos casos. Així, per exemple, el coeficient de correlació és molt similar. La mitjana aritmètica de l'Àlgebra ha pujat en el segon cas perquè s'han exclòs dos estudiants més, mentre que les dels dos Càlculs són idèntiques. El pendent de la recta de regressió també és gairebé el mateix, i el mateix passa amb els tres errors. Sí que és cert que la distribució dels punts en aquest cas sembla més compacta o acumulada a l'entorn de la recta de regressió que en el primer cas.

Abans de procedir a l'estudi cas per cas no esperàvem trobar tanta simil·litud.

8.3. Càlcul I i Càlcul II

Finalment, estudiarem la distribució bidimensional *x,y*, on *x* representa les notes de Càlcul I i *y* les de Càlcul II. Seguirem suprimint els estudiants que no es van presentar a Càlcul II (tots 62 es van presentar a Càlcul I). Quedaran, doncs, 59 estudiants presentats a les dues assignatures.

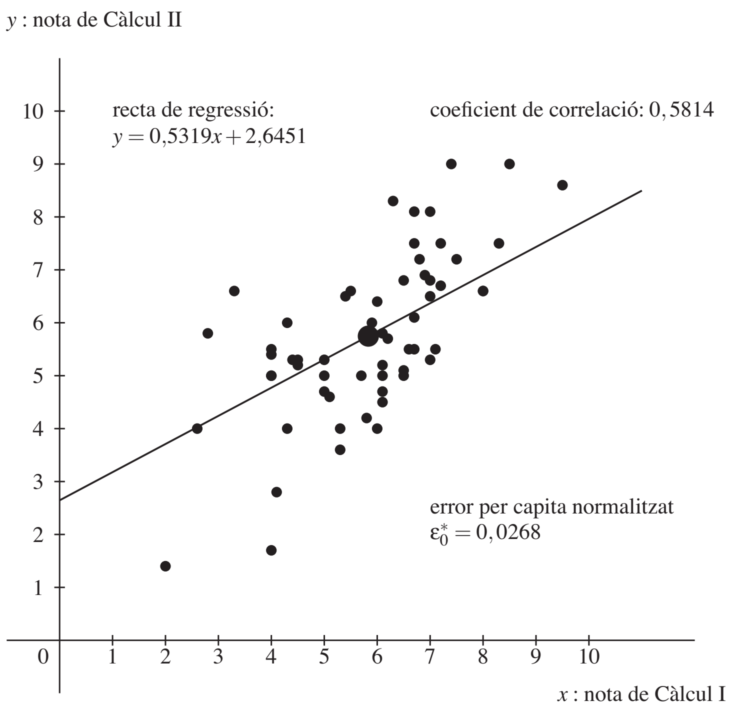


Figura 9. Diagrama de dispersió de Càlcul I i Càlcul II.

Novament, la relació entre les dues assignatures és *seqüencial*, però a priori cal esperar que la segona estigui relacionada més estretament amb Càlcul I que no pas amb Àlgebra, simplement pels continguts dels programes respectius. Els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació* $r \in [-1{,}1]$ entre les dues variables dona aquí $r = 0{,}5814$. Indica una correlació positiva dèbil entre *y* i *x*.
- El *centre de gravetat* de la distribució és el punt $(\overline{x},\overline{y})$ =(5,832203, 5,747458).
- La *recta de regressió de y sobre x* dona $y = 0{,}5319x + 2{,}6451$. Es pot veure representada en el diagrama de dispersió (figura 9), igual que el centre de gravetat, marcat amb un cercle de doble gruix.
- L'*error quadràtic* d'aquesta recta és $\varepsilon = 9{,}0928$, l'*error quadràtic per capita* dona $\varepsilon_0 = 0{,}1541$ de mitjana per a cada estudiant i l'*error normalitzat* és $\varepsilon_0^* = 0{,}0268$.

Comparem els resultats d'aquest cas amb els dels casos 8.1 (sense NP) i 8.2. La taula 6 recull els paràmetres.

Taula 6. Comparativa d'assignatures.

cas	correlació r	recta de regressió m	centre de gravetat $(\overline{x},\overline{y})$	error quadràtic ε	error normalitzat ε_0^*
1 A vs. C1	0,6434	0,5776	(7,10, 5,73)	8,9367	0,0251
2 A vs. C2	0,6182	0,5679	(7,20, 5,68)	8,8961	0,0252
3 C1 vs. C2	0,5814	0,5319	(5,83, 5,75)	9,0928	0,0268

Contràriament al que es podria esperar segons els temaris de les tres assignatures, la correlació dona valors pròxims però, curiosament, decreixents seguint l'ordre dels casos. La recta de regressió sempre és creixent, però cada vegada amb menys pendent, i el més baix és el de C1 vs C2. Les coordenades del centre de gravetat presenten petites diferències, possiblement degudes als diferents conjunts de NP exclosos en cada cas.

En tot cas, la mitjana de l'Àlgebra, que supera el 7, és molt superior a les dels dos Càlculs, que es mantenen més a prop del 6 que del 5. En els diagrames es nota més dispersió entre A i C1, i menys entre A i C2 i entre C1 i C2, que donen diagrames més «compactes» al voltant de la recta de regressió. Finalment, l'error quadràtic aquí és comparable perquè les dades de les sèries estan totes a l'interval $[0{,}10]$ i les quantitats de dades són homologables: 58, 56 i 59, respectivament. Aquest error és una mica més alt comparant els càlculs i més baix comparant A i C1 o A i C2. L'error normalitzat també augmenta, gairebé dues centèsimes, en comparar els dos càlculs.

8.4. Càlcul II vs Àlgebra i Càlcul I

Aquí ens proposem analitzar la correlació global o *conjunta* de Càlcul II (variable *Z*) respecte a les altres dues assignatures (variables *X* i *Y*, respectivament). Caldrà fer ús de tècniques una mica més complicades que generalitzen les del cas bidimensional, estudiat repetidament en les seccions prèvies.

La mostra consta dels 56 estudiants que es van presentar a les tres assignatures. Recordem que Càlcul II és seqüencial respecte a Àlgebra i Càlcul I. Els càlculs estan fets optimitzant les aproximacions i els resultats són els següents:

- El *coeficient de correlació (global)* de Z respecte a X i Y dona $R_Z(X,Y) = 0{,}7508$. Aquest coeficient sempre està a l'interval $[0,1]$.
- El *centre de gravetat* de la distribució és el punt $(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}) =$(7,1964, 5,7964, 5,6839).
- El *pla de regressió de Z sobre X i Y* dona:

$$Z - 5{,}6839 = 0{,}3753(X - 7{,}1964) + 0{,}4206(Y - 5{,}7964)$$

o, en una forma equivalent,

$$Z = 0{,}3753X + 0{,}4206Y + 0{,}5451.$$

- El fet que la suma dels valors Z^* que dona la recta de regressió coincideixi amb la suma dels valors Z de les dades ens sembla merament anecdòtic.
- Evidentment, aquest pla passa pel centre de gravetat.
- L'*error quadràtic per capita* d'aquest pla és $\varepsilon_Z^0(X,Y) = 1{,}0798$.

Comparant amb els resultats dels estudis bidimensionals resumits en la taula 6 al final de la secció 8.3, observem que el coeficient de correlació global és notablement millor que els tres coeficients de correlació binària. Aquest és un resultat esperat, ja que l'ajustament millora en considerar dues variables independents en comptes d'una de sola. La variació dels coeficients deriva del fet que X i Y estan relacionades entre elles. Finalment, C1 té un coeficient més gran que A, cosa que també sembla raonable vistos els programes de les tres assignatures. També observem que $X = 10$ i $Y = 10$ donen $Z = 8{,}5041$.

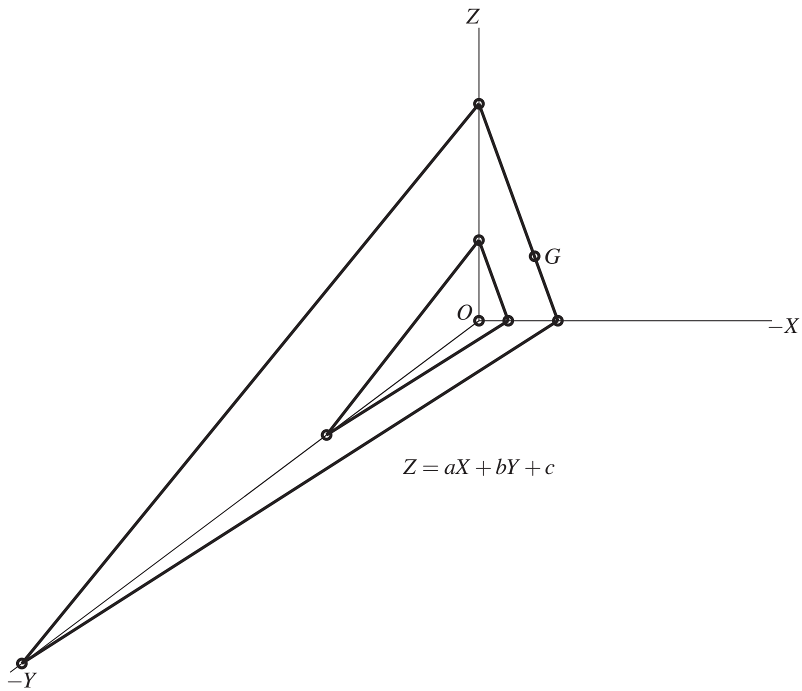


Figura 10. Pla de regressió de Càlcul II respecte a Àlgebra i Càlcul I.

Les coordenades del centre de gravetat G són molt semblants a les dels centres de gravetat binaris; de fet, cadascuna d'elles està compresa entre les dels dos binaris corresponents i les diferències poden ser degudes a les petites variacions en el nombre d'estudiants de cada estudi. Segons l'equació del pla de regressió, Z creix quan una de les variables X,Y creix i l'altra roman constant o totes dues creixen.

En aquest cas tridimensional, no sembla adequat donar la representació gràfica dels 56 punts, però podem visualitzar, a la figura 10, el pla de regressió en una doble imatge inclusiva. Finalment, l'error per capita no és comparable amb els bidimensionals perquè no es defineix com ells; tanmateix, prenent $\sqrt{56}\ \varepsilon_Z^0(X,Y) = 7{,}4833$, obtenim un paràmetre homologable que resulta força menor que tots els corresponents errors quadràtics bidimensionals. Resumint, l'estudi tridimensional sembla un bon complement dels tres estudis bidimensionals.

9. Exemple: temperatura de xafogor

La *temperatura de xafogor* és un concepte que pretén mesurar quantitativament la «sensació tèrmica» que experimenta el cos humà a causa de la combinació de la temperatura ambiental (temperatura de l'aire) i la humitat relativa. La primera notícia sobre aquesta idea la va popularitzar, almenys a Catalunya, Alfred Rodríguez Picó a TV3, on va exercir com a meteoròleg des del 1984 fins al 2002.

En l'actualitat, els que descriuen el temps solen parlar de la (temperatura de) *xafogor* quan mereix un comentari perquè és força més elevada que la temperatura ambiental. De fet, el concepte, degut a R. G. Steadman, va néixer cap al 1979. Només cal anar a la Viquipèdia, per exemple, per obtenir una informació més detallada. En particular, hom hi troba una fórmula (que ha estat relativament criticada) que relaciona la temperatura de xafogor en termes de la temperatura ambiental i la pressió del vapor d'aigua de l'atmosfera.

L'objecte del nostre estudi no fa referència a aquesta fórmula. Una taula de dades publicada el 2017 a www.marenostrum.org/meteorologia/xafogor donava 291 valors simultanis de la temperatura ambiental, la humitat relativa i la temperatura de xafogor —-suposem que calculada amb la fórmula esmentada més amunt—-, amb la particularitat de dividir la graella en cinc blocs de diferents tonalitats (vegeu la figura 11).[5]

Hem volgut comparar la correlació de la xafogor respecte a les altres dues variables en cada un dels blocs, numerats de l'1 al 4 de dalt a baix, ja que hem reduït els dos últims a un de sol perquè considerem el cinquè una mica marginal. És a dir, analitzarem cada bloc com una distribució tridimensional on les variables són: X = temperatura ambiental, Y = humitat relativa i Z = temperatura de xafogor. Obtindrem els paràmetres bàsics de cada distribució i els confrontarem. El web de Mare Nostrum assigna les interpretacions següents als colors: 1 = perill extrem; 2 = perill; 3 = precaució; 4 = límit de confort; 5 = confort tèrmic.

5. Ara s'hi pot trobar una taula actualitzada l'1 de gener de 2023 que és idèntica a la presentada aquí.

	HUMITAT RELATIVA %																
TEMPERATURA °C	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20
43													56	54	51	49	47
42												56	54	52	50	48	46
41											56	54	52	50	48	46	44
40										57	54	52	51	49	47	44	43
39									56	54	53	51	49	47	45	43	41
38							57	56	54	52	51	49	47	46	43	42	40
37					58	57	55	53	51	50	49	47	45	45	42	40	
36			58	57	56	54	53	51	50	48	47	45	43	42	40	38	
35		58	57	56	54	52	51	49	48	47	45	43	42	41	38	37	
34	58	57	55	53	52	51	49	48	47	45	43	42	41	39	37	36	
33	55	54	52	51	50	48	47	46	44	43	42	40	38	37	36	34	
32	52	51	50	49	47	46	45	43	41	40	39	38	37	36	34	33	
31	50	49	48	46	45	44	43	41	40	39	38	36	35	34	33	31	
30	48	47	46	44	43	42	41	40	38	37	36	35	34	33	31	31	
29	46	45	44	43	42	41	39	38	37	36	34	33	32	31	30		
28	43	42	41	41	39	38	37	36	35	34	33	32	31	29	28		
27	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	28		
26	39	38	37	36	35	34	33	32	31	31	29	28	28	27			
25	37	36	35	34	33	33	32	31	30	29	28	27	27	26			
24	35	34	33	33	32	31	30	29	28	28	27	26	26	25			
23	33	32	32	31	30	29	28	27	27	26	25	24	23				
22	31	29	29	28	28	27	26	26	24	24	23	23					
21	29	29	28	27	27	26	26	24	24	23	23	22					
	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20
	HUMITAT RELATIVA %																

Figura 11. Dades empíriques sobre temperatura, humitat i xafogor. Taula extreta de www.marenostrum.org/meteorologia/xafogor.

Els resultats dels paràmetres s'han arrodonit a un nombre suficient de decimals. Els hem reunit en la taula 7 per poder comparar–los còmodament.

Taula 7. Comparativa de xafogor per blocs.

xafogor	bloc 1	bloc 2	bloc 3	blocs 4 i 5
significat	perill extrem	perill	precaució	confort
dades	42	98	109	42
a	1,875623	1,695420	1,570360	0,862790
b	0,305099	0,267812	0,194376	0,109614
c	–36,284824	–28,585348	–21,406818	0,000000
error/capita	0,748058	1,147926	0,797269	0,801224
correlació	0,897887	0,941676	0,963805	0,871475
centre de gravetat	(37, 70, 55)	(35, 58, 46)	(28, 60, 34)	(23, 55, 26)

Els comentaris són els següents:

- En els quatre blocs els coeficients *a,b* són positius. Això vol dir que, segons el pla de regressió, qualsevol increment de la temperatura ambient i/o de la humitat relativa provoca un augment de la xafogor, i és molt més acusada la influència de la temperatura ambiental ja que $a >> b$. Tanmateix, aquest doble efecte decreix al llarg dels quatre blocs, de manera que és en el bloc marginal on és menys rellevant.
- El coeficient *c* fa una funció de correcció. En valor absolut decreix, i arriba a desaparèixer en el quart bloc.
- L'error per capita és baix segons el rang de la xafogor ($[22,58]$) i no varia gaire llevat del segon bloc, on és molt més alt que en els altres tres (aproximadament entre un 42 % i un 54 % superior).
- El coeficient de correlació també és força alt en tots els casos, sobretot en el segon i el tercer bloc. Això fa pensar que el primer bloc i el quart no són tan representatius de la distribució global.
- Els centres de gravetat apareixen, en cada bloc, entre les dades del bloc, com és lògic, decreixen en les coordenades X i Z i tenen un comportament més irregular a la coordenada Y.
- És probable que el pla de regressió total, és a dir, considerant conjuntament totes les dades de la distribució, sigui una mixtura dels quatre plans per blocs. No hem considerat necessari calcular—lo.

10. Conclusions

Una vegada analitzats tots els exemples, sembla interessant remarcar la varietat d'àmbits als quals fan referència i comparar els principals resultats obtinguts. Hi ha un exemple de joc individual (sudoku), dos de significat econòmic (referits a una mateixa farmàcia), un de dedicat a la lliga de Primera Divisió en dues fases (equips forts i equips dèbils), un altre sobre qualificacions acadèmiques dividit en quatre parts, i un últim sobre un concepte meteorològic, la temperatura de xafogor, també desdoblat en quatre blocs.

Els primers queden definits per distribucions bidimensionals, mentre que els dos últims —l'estudi de tres assignatures simultàniament i els quatre casos de xafogor— corresponen a distribucions tridimensionals. Tots són exemples de casos concrets i, per tant, amb resultats en principi no extrapolables, però sembla clar que la metodologia emprada en tots els casos és perfectament aplicable a qualsevol altre cas amb dades numèriques diferents i, sobretot, a situacions que es puguin modelar en termes anàlegs.

Es posa en relleu, doncs, una reflexió sobre com l'ús d'una eina d'implementació senzilla permet una primera anàlisi que pot ser molt rellevant per descriure situacions econòmiques, empresarials, educatives, etc.; en definitiva, de la societat actual.

La taula 8 permet copsar amb un cop d'ull la informació principal obtinguda en cada exemple: el nombre de dades; el coeficient de correlació, que es mesura de manera diferent en el cas bidimensional (*r*) i en el tridimensional (*R*), com s'indica en la taula (vegeu les seccions

3.1.1 i 3.1.3); el pendent de la recta de regressió en el cas bidimensional —-idea que no s'estén al cas tridimensional perquè passem a tenir un pla de regressió—-; i, finalment, els diversos tipus d'error —-tres en el cas bidimensional, només dos en l'altre—-.[6] El paràmetre ε^{*0} en els casos tridimensionals es defineix, per analogia amb el cas bidimensional, dividint ε^0 per $\overline{Z}$, per poder comparar tots els errors normalitzats. El resultat és que tots aquests errors, llevat d'un, són inferiors a 0,1. I l'única excepció no arriba a 0,2.

Taula 8. Comparativa de tots els exemples estudiats.

ex.	tema	dades	correlació	pendent	error	error	error
					quadràtic	per capita	norm.
		n	r	m	ε	ε_0	ε_0^*
4	sudokus	108	−0,295	−0,140	8,38	0,078	0,052
5	targetes	12	0,853	12,498	1.346,20	112,180	0,022
6	venda lliure	12	0,540	0,219	3.326,34	277,19	0,030
7	equips forts	8	0,856	1,718	6,91	0,864	0,012
7	equips dèbils	9	0,979	1,953	20,90	2,323	0,062
8	A vs C1 (*)	62	0,002	0,001	12,59	0,203	0,036
8	A vs C1	58	0,643	0,578	8,94	0,144	0,025
8	A vs C2	56	0,618	0,568	8,90	0,144	0,025
8	C1 vs C2	59	0,581	0,532	9,09	0,154	0,027
		n	R			ε^0	ε^{*0}
8	A i C1 vs C2	56	0,727			1,080	0,190
9	xafogor bloc 1	42	0,898			0,748	0,014
9	xafogor bloc 2	98	0,942			1,148	0,025
9	xafogor bloc 3	109	0,964			0,797	0,023
9	xafogor bloc 4	42	0,871			0,801	0,031

És destacable la varietat del nombre de dades. També la del coeficient de correlació, que dona un valor negatiu i un altre pròxim a 0 al costat de valors molt pròxims a 1. Quelcom similar es pot dir del pendent de la recta de regressió. Pel que fa als errors, l'error quadràtic dels dos exemples de caire econòmic és elevat perquè són elevades les quantitats que defineixen la sèrie *y* de la distribució. Per això hem introduït l'error per capita, que permet fer comparacions independentment del nombre de dades. I encara més l'error normalitzat, que apareix a l'última columna i dona un resultat que permet comparar tots els exemples.

Agraïments

Volem agrair la revisió duta a terme per Marianna Bosch, que amb els seus comentaris encertats ens ha ajudat a millorar aquest treball. I també la revisió lingüística duta a terme per dos correctors anònims que han millorat força la presentació.

6. L'asterisc del sisè tema indica que l'estudi està fet assignant la qualificació 0 a tots els no presentats, criteri que es descarta en els tres casos següents. Com es pot veure, la correlació creix molt en prescindir d'aquest criteri.

Bibliografia comentada

Les referències que donem són una mica *sui generis*. Aquest article no és dels que, de vegades més aviat marginalment, connecten amb molts treballs previs, propis o d'altres autors, com és habitual en els dedicats a la «internalitat». Es basa en nocions d'estadística força conegudes i estudia situacions no considerades sovint en la literatura científica.

[1] Especial Sudokus nº 235 (2021). Madrid: Ediciones Pléyades. Per a les mateixes seccions.

[2] Jarne, G.; Pérez—Grosso, I.; Minguillón, E. (1997). *Matemáticas para la economía*. Madrid: MacGraw—Hill. Per ajudar a captar el rerefons del nostre enfocament.

[3] Legendre, A. M. (1786). «Mémoire sur la manière de distinguer les Maxima des Minima dans le Calcul des Variations». *Mémoires in Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, pàg. 7. Per a la secció 3. Tot i que sembla que Gauss va ser el primer a descobrir el mètode dels mínims quadrats, Legendre va ser el primer que va publicar—lo.

[4] Legendre, A. M. (1819). «Méthode des moindres carrés pour trouver le milieu le plus probable entre les résultats de différentes observations». *Mémoires présentés par divers Savants à la l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, pàgs. 149—154. Nova presentació davant d'un auditori diferent.

[5] McGuire, G.; Tugemann, B.; Civario, G. (2014). «There is No 16—Clue sudoku: Solving the sudoku minimum number of clues problem via hittings set enumeration». *Experimental Mathematics* 23 (2), pàgs. 190—217. Per a les seccions 2 i 4.

[6] Peña, D.; Romo, J. (1997). *Introducción a la Estadística para las Ciencias Sociales*. Madrid: McGraw—Hill. Per al contingut de la secció 3.

[7] Spiegel, M. R. (1969). *Estadística*. Madrid: McGraw—Hill. Un clàssic en el que ens hem basat a la secció 3.

[8] Steadman, R. G. (1979). «The assessment of Sultriness. Part I: A temperature—humidity index based on human physiology and clothing science». *Journal of Applied Meteorology* 18 (7), pàgs. 861—873. Per a la secció 9.

[9] Steadman, R. G. (1979). «The assessment of Sultriness. Part II: Effect of wind, extra radiation and barometric pressure on apparent temperature». *Journal of Applied Meteorology* 18 (7), pàgs. 874—885. Per a la secció 9. Continuació de l'article anterior.

[10] Viquipèdia, on es poden trobar molts tutorials sobre els temes concrets d'estadística emprats aquí. Per a la secció 3.

[11] www.rfef.es. Web de la Real Federación Española de Fútbol, on es poden trobar els resultats i les classificacions de la Lliga de Primera Divisió 2020—2021. Per a la secció 7.

[12] m www.marenostrum.org/meteorologia/xafogor (2017). Web on va aparèixer la taula de la figura 11. Actualitzada amb data 1 de gener de 2023. Per a la secció 9.

Mates al Carrer, matemàtiques per a tothom

Luis Cros Lombarte
Professor de secundària a l'Escola Pia de Sarrià de
Coordinador del grup SET, grup de jocs de Associació
Barcelona per a l'estudi i l'aprenentatge
de les Matemàtiques (ABEAM)

Resum

Moltes vegades sentim a dir «*profe* de mates?...», «...buf, quin pal», «...a mi se'm donen molt malament les *mates*, jo soc de lletres», «...jo les odio, em feien patir molt a l'escola», «*profe*, això per a què serveix?» i un llarg seguit de frases sense sentit que mostren que les matemàtiques són una pedra a la sabata de molta gent. Què podem fer per capgirar aquest sentiment? En aquest article explicarem una proposta que portem als carrers del nostre territori amb l'objectiu d'aconseguir mostrar les matemàtiques des del seu vessant més lúdic, entretingut, divertit i proper, sense perdre el seu rigor per ajudar a canviar els prejudicis socials fortament arrelats en la nostra societat actual en contra de les matemàtiques.

Abstract

Nowadays it is not unusual to hear some tough statements such as these: «a maths teacher?...», «such a bore, man!», as well as «sorry, teacher, I will never be good at maths, I am a bookworm, anyway», or even, «dude, I definitely hate maths, they were such a nightmare, back at school», and, of course, «teacher, what is maths for, anyway?». Such an infamous discourse confirms that Mathematics is perceived by many as being a true thorn in the side. The aim of this paper is to propose a new way to look at Mathematics. We intend to demonstrate that it can be such an interesting field of interest for everyone. Also, they can definitely be quite a fun playground. Let us hope that this will effectively contribute to getting rid of these prejudices against Mathematics which seem to have been so deeply rooted in our society for so many years.

1. Amor i rebuig

La relació amb les matemàtiques és d'amor o de rebuig, no hi ha terme mitjà. Aquest rebuig està associat a males experiències en èpoques escolars. Ja ho escrivia Claudi Alsina en el pròleg del seu llibre *El club de la hipotenusa*:

> Un dels secrets millor guardats de la cultura actual és el caràcter profundament divertit de les matemàtiques. Per a aconseguir que aquest secret no surti a la llum pública s'han articulat tota mena d'estratègies escolars i socials. A base de pissarres inintel·ligibles, explicacions exòtiques, suspensos abundants i llibres rigorosos s'ha aconseguit que la població en general, lluny de descobrir el secret, arribi a creure tot el contrari. Fins al punt que només la presència de la paraula «matemàtica» provoca ja reaccions contundents.

Des de fa temps, un reduït —o no tant— grup d'amants de les matemàtiques ens hem decidit a canviar aquesta tendència i aconseguir que aquest estigma es redueixi. No esperem que tothom estimi les matemàtiques, però sí que els tingui una mica d'estima.

El que es recull en aquest article és una acció que hem fet, i anirem repetint pel nostre territori, per mostrar el caràcter divertit i entretingut de les matemàtiques, sobretot a les persones totalment allunyades d'elles.

2. D'on sorgeix aquesta iniciativa?

Amb l'èxit de la iniciativa del Dia Escolar de les Matemàtiques, activitat totalment arrelada als nostres centres educatius, l'any 2020 se'n va celebrar la vintena edició. Veient que al voltant de les matemàtiques hi ha un sentiment de repulsa acceptat per la societat i coneixent l'enorme quantitat d'activitats divulgatives que es fan a tot Espanya, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) vol impulsar una activitat de divulgació matemàtica semblant al Dia Escolar de les Matemàtiques però dirigida a tota la societat. L'objectiu principal d'aquesta activitat és mostrar la cara amable de les matemàtiques, la que ens va enamorar i ens fa seguir-ne enamorats encara avui dia, per poder anar eliminant el prejudici que es té envers les matemàtiques.

El mes de febrer de 2019 la FESPM va convocar un grup de professionals de diferents societats d'arreu d'Espanya que fem activitats al carrer o fires de ciències i de matemàtiques per compartir les nostres experiències i saber quins haurien de ser els requisits d'un bon Mates al Carrer.

Després de dues jornades de compartir experiències vam concloure que farem Mates al Carrer quan apropem les matemàtiques a tothom fora del context escolar des d'un punt de vista lúdic, divulgatiu, oferint activitats adaptades a diferents nivells. Es tracta de mostrar les matemàtiques gaudint amb elles, amb entusiasme. Es poden oferir idees matemàtiques complexes d'una forma natural i a l'abast de tothom.

Com diu el seu nom, és una activitat que es portarà a terme al carrer, en un lloc per on pugui passejar la gent, com una plaça o un passeig, per poder trobar-nos amb la gent que no aniria a buscar les matemàtiques, sinó que se les trobarà i s'emportarà una sorpresa positiva.

Mates al Carrer és una proposta que desenvoluparan, independentment a cada territori, persones de manera voluntària sota el paraigua d'una societat matemàtica del mateix territori, amb la col·laboració d'entitats, amb l'únic incentiu de fer divulgació. Entenent el caràcter particular de cada territori, l'organització de cada Mates al Carrer concretarà les activitats que es poden fer, tots els plantejaments són vàlids. Una bona idea és crear materials amb un alt contingut divulgatiu, presentats en taules accessibles de manera que els visitants els puguin tocar i hi puguin jugar. Es pot tenir en compte la possibilitat que els visitants es puguin emportar a casa alguna cosa feta per ells mateixos. Les activitats que funcionen prou bé amb aquest format són: poliedres creats amb llaminadures o amb escuradents i plastilina, enigmes, solitaris i jocs d'estratègia, puzles topològics, tangrams, jocs numèrics, papiroflèxia (aquestes taules accessibles s'han fet servir en activitats multitudinàries al carrer a Madrid, Cornellà, la Corunya...). A l'hora de dissenyar l'activitat cal tenir en compte l'espai, el nombre de voluntaris i el temps de què es disposarà, per adequar-hi el nombre de taules. Una quantitat molt gran de taules angoixa el visitant, que vol veure-ho tot i no té temps. Si es disposa d'espai i voluntaris, és preferible repetir les mateixes activitats en diferents taules. A fi que els voluntaris de les taules no es vegin desbordats per la quantitat de gent que pugui estar a la seva taula, és important tenir cartells explicatius amb les instruccions de les activitats clares, tot i que, sempre que es pugui, és preferible que els voluntaris acompanyin els visitants a l'hora de fer les activitats. Els cartells han de portar el logotip de la societat que fa de paraigua. També cal dissenyar taules accessibles, per exemple, per invidents.

Si es té la possibilitat, és molt bona idea introduir algun tipus d'espectacle que es pugui fer en diferents moments de la jornada: espectacles de màgia, monòlegs, lectura de relats o poemes, passeigs matemàtics... Perquè aquesta proposta pugui dur-se a terme caldrà disposar d'un bon equip de so.

Pel que fa a la data del Mates al Carrer, s'ha de fer en cap de setmana. És més fàcil per organitzar-ho amb voluntaris i per arribar a tot el públic. D'altra banda, és millor en horari de matí, si pot ser a partir de les deu, perquè abans no hi ha gent. I allargar-lo tot el dia implica disposar de molts voluntaris per fer torns. Com es fa amb el Dia Escolar de les Matemàtiques —12 de maig—, caldria fer-lo el mateix dia o el mateix cap de setmana per donar-hi més notorietat a escala global. El curs acadèmic 2018-2019 es va proposar com a data el 7 d'abril o el dia més a prop possible. Per als cursos vinents caldrà concretar una data entre totes les societats d'Espanya perquè no coincideixi amb altres esdeveniments.

Com a nexe entre tots els Matemáticas en la Calle, totes les societats han de fer una mateixa activitat: construir un mosaic de manera col·laborativa entre tots els visitants. El curs acadèmic 2018-2019 la base del mosaic va ser l'os Nazari. Cada curs la FESPM fa arribar als presidents de les societats de cada territori la plantilla per dur a terme el mosaic i el penjarà a la seva web.

Cal deixar clar a les institucions, quan es presenti l'activitat per demanar l'ocupació de l'espai públic, que això no és una activitat d'oci i temps lliure; és cultura sota el guiatge de professionals de l'ensenyament, amb materials dissenyats per a l'esdeveniment amb una finalitat didàctica i atractiva, portada a terme per uns «monitors» de luxe: tots els voluntaris estan directament relacionats amb l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques.

3. Què proposem al nostre territori?

La proposta que es va recollir a la jornada organitzada per la FESPM es va compartir al nostre territori durant la jornada de l'ABEAM de l'any 2019 i al C^{2}EM del 2020. Entre les dues comunicacions vam formar un grup de treball per posar en marxa el projecte de fer un Matemáticas en la Calle a Catalunya, sota el paraigua de la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT).

Després d'unes quantes reunions i de llargs debats vam acabar concloent que el nostre Matemáticas en la Calle es dirà Mates al Carrer i tindrà les característiques següents:

1. Es farà els mesos de setembre o octubre, que permeten fer activitats al carrer sense patir les inclemències meteorològiques. És un moment del curs acadèmic en què tenim les bateries d'energia completament carregades i no hi ha gaires activitats matemàtiques al nostre territori.
2. Serà una activitat itinerant. L'objectiu d'aquesta decisió és fer partícip la gent de diferents parts del territori any rere any.
3. Es convidarà els centres educatius, associacions i entitats de la localitat a participar de manera activa en l'organització i la realització de la jornada.
4. L'ideal seria que una de les activitats que es faci durant el Mates al Carrer sigui un passeig matemàtic per la localitat. L'objectiu d'aquest passeig és poder mostrar diferents llocs de la localitat amb ulls matemàtics. Per deixar empremta al lloc on es faci el Mates al Carrer, la passejada quedarà registrada al projecte MathCityMap perquè es pugui seguir fent una vegada hagi acabat la jornada.
5. El punt d'inici del passeig matemàtic serà el lloc on es trobi el gruix de les activitats de la jornada: taules divulgatives, jocs gegants, exposicions...

Quan van dissenyar les activitats del primer Mates al Carrer vam decidir que era millor que els participants estiguessin a la zona i finalment van fer el passeig dins de la plaça on es feia el Mates al Carrer. Tot i que es pot fer per tota la localitat, recomanem que es faci al mateix lloc on es fa el gruix d'activitats.

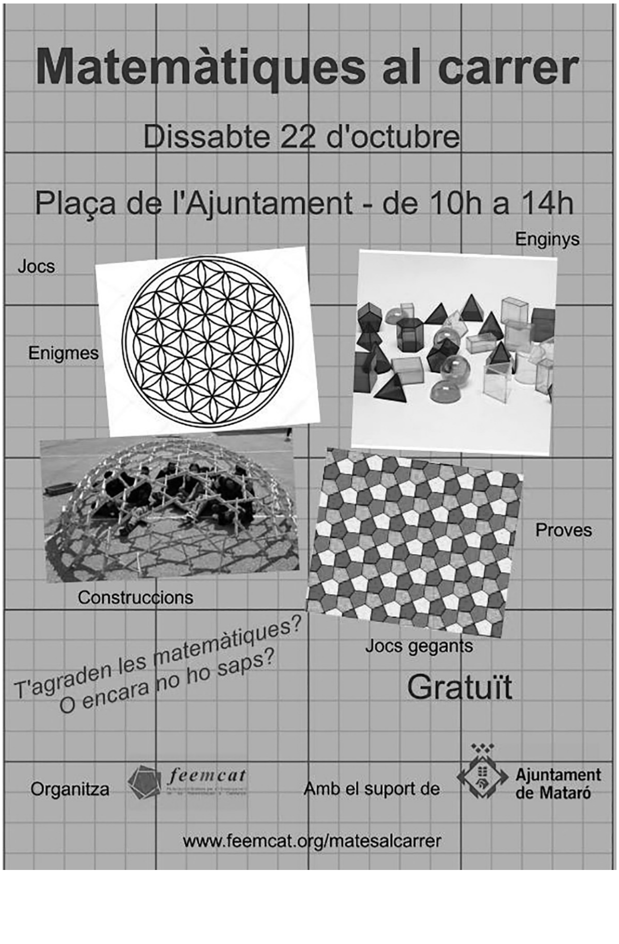
Si observem des de la distància les reflexions finals que es van elaborar en el C^{2}EM 2020, podrem veure que amb aquesta activitat es dona resposta a dos dels reptes que vam proposar per a aquest quadrienni:

Repte 7: «Treballarem per canviar preconceptes socials arrelats, com «les matemàtiques són difícils» o «això per a què serveix?», per altres com «tothom serveix per les matemàtiques» o «les matemàtiques ens ajuden a interpretar el món».

Repte 8: «Promourem activitats participatives on els i les docents, els i les alumnes i les seves famílies puguin gaudir plegats d'experiències matemàtiques positives (fires, activitats de carrer, visites, concursos, jocs, tertúlies, etc.)».

La pandèmia de covid-19 del 2020 i les seves restriccions posteriors van frenar la nostra il·lusió de portar a terme el nostre Mates al Carrer. El setembre de 2022 vam rebre la notícia que es donaven per finalitzades les restriccions per dur a terme activitats massives a l'aire lliure i vam decidir fer-lo aquell mateix mes d'octubre a Mataró, una aposta arriscada però que va sortir molt bé.

4. El nostre Mates al Carrer



La pandèmia de covid-19 va aturar els nostres desitjos de portar a terme el nostre Mates al Carrer l'any 2020. Vam estar treballant en línia per consolidar un grup organitzador, divulgar el projecte i tenir la feina feta en el moment que es pogués fer. Tot això ens va permetre organitzar la primera edició a Mataró el mes d'octubre de 2022.

Per dur-lo a terme vam constituir un grup organitzador format pels membres del grup de treball que hem anat desenvolupant la proposta i per agents locals, fonamentals per fer la proposta de la millor manera possible, ja que coneixen les millors ubicacions, els contactes i les dates idònies. Enric Castells, Lluís Mora i Toni Gomà van ser clau per aconseguir que la jornada esdevingués un èxit total.

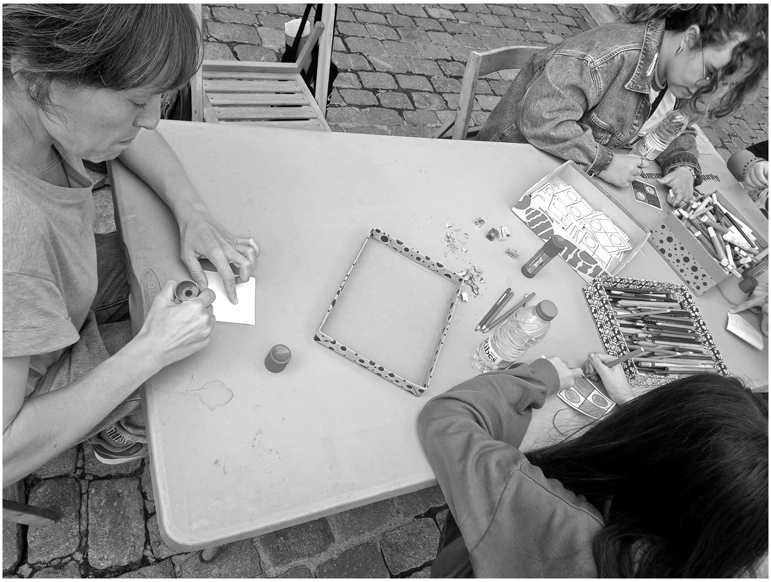
Mitjançant les associacions de matemàtiques del territori es va fer una crida als seus socis per presentar les activitats de la jornada. Vam rebre les propostes i l'oferiment per col·laborar de Sílvia Margelí, Juan Diego, Robert Escribano, Joan Miralles, Joan Folguera, Joan Carles Berroca, Pol San, Mónica Casas i Tere Longueira.

La jornada va aplegar catorze propostes temàtiques:

1. Mosaic
2. Calculadora
3. Cúpules Leonardo
4. Màgia numèrica
5. Reptes matemàtics
6. Nonaga
7. Speedcups
8. Microrobots
9. Bombolles de sabó
10. Primilògic-Kaprekar
11. Papiroflèxia
12. Estimacions
13. Maquetem Mataró
14. Divermazo

1. Mosaic: portat a la pràctica per Tuti Comalat i Joan Carles Berrocal, en aquesta proposta els visitants agafaven la rajola típica de Mataró, la pintaven i l'enganxaven en un mural per formar les paraules «MATARÓ MATEMÀTICA».

Tot i que no es va poder completar l'objectiu, valorem positivament l'activitat perquè tothom, grans i petits, es va engrescar i s'ho va passar molt bé.



2. Calculadora: portada a la pràctica per Tuti Comalat i Joan Carles Berrocal, en aquesta proposta tothom que passava s'animava a resoldre uns enigmes per endevinar nombres fent operacions amb la calculadora.

Creiem que anava dirigit a un públic més gran de deu anys, era massa complicat per als petits; per la qual cosa creiem que estaria bé buscar alguns enigmes per a ells.

3. Cúpules Leonardo del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA): portades a la pràctica per Juan Diego Garcia, al llarg del matí es va anar atenent el públic interessat i es van construir diferents cúpules sense parar. L'activitat va agradar molt.

4. Màgia numèrica: portada a la pràctica per Pura Fornals i Robert Escribano, es van presentar diferents jocs de màgia numèrica i se'n va explicar el perquè. La taula va estar plena constantment perquè s'hi va apropar molta gent, tant joves com adults. Per als petits es va fer també una serp de papiroflèxia.

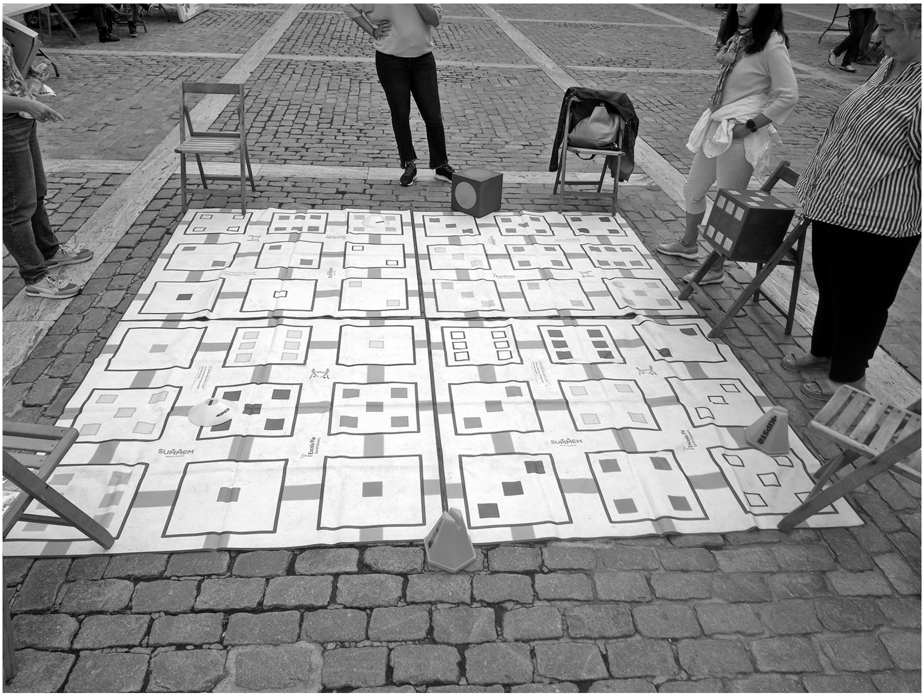
5. Reptes matemàtics: portats a la pràctica per Joan Miralles i Joan Folguera, es van presentar diferents reptes de sobretaula que van tenir molt bona acollida, sobretot les peces per aconseguir figures simètriques.

Els reptes de sobretaula per als petits van costar una mica més, els calia un cop de mà. El que es va posar a terra per fer «construccions estables» (gossos de colors fets amb cubs) va anar molt bé per als més petits.

6. Nonaga: portat a la pràctica per Judit Rodríguez, Tere Longueira i Pol San, va ser un joc molt dinàmic. No va parar d'entrar gent a jugar i en alguns moments fins i tot hi havia gent esperant, tot i haver-hi dos jocs iguals de costat. La majoria dels participants eren nens d'entre deu i quinze anys, però molts repetien i a vegades demanaven fer equip amb algú per poder jugar i no haver-se d'esperar. A més, algunes persones van demanava el nom del joc i on podien comprar-lo.

7. Speed Cups: portat a la pràctica per Marta Farrés, qui va disposar tres jocs de cubs gegants. Hi va participar molta gent a partir de la primera hora de la jornada. Es va fer un total de vuitanta partides de deu minuts. Algun infant va jugar més d'una vegada i en algunes partides els pares jugaven i els nens miraven. Va ser una jornada molt divertida. Com a proposta de millora es podria pensar a versionar les normes per a diferents edats.

8. Micro Robots: portat a la pràctica per Monica Casas, és un joc de taula en versió gegant de 3 m × 3 m. Va haver-hi gent gairebé tota l'estona. Els nens jugaven amb molt entusiasme, però els més petits només podien llançar els daus, no és un joc per a petits.



9. Bombolles de sabó: portades a la pràctica per Sílvia Margelí i Enric Castellà, es van fer a través de dues activitats:

- Volums amb aigua acolorida: es van fer diferents experiments que es poden trobar a http://ja.cat/volums.
- Propietats amb bombolles de sabó: basada en la xerrada d'Anton Aubanell. Hi ha un recull del que es va fer a https://ja.cat/BKjXv.

10. Primilògic-Kaprekar: portat a la pràctica per Carles Masjuan amb els materials que vam fet servir a cangur.org/festa-matmat. La resposta del públic va ser molt bona. Potser aquesta activitat era més «de pensar» que en altres taules i, per tant, anava adreçada a participants més grans, cosa que va frenar una mica la participació.

11. Papiroflèxia: portada a la pràctica per Estefanía Hernández, qui, amb el títol «Quines matemàtiques amaga un ocellet de paper?», va presentar les diferents maneres de fer un ocell de paper. Tot i això, l'objectiu principal no era el plegat en si, ni la interpretació dels diagrames per aconseguir fer-lo, sinó totes les sorpreses matemàtiques que s'amaguen durant i després del procés de plegat. Es treballen la resolució de problemes, el fet de fer-se preguntes, el raonament, continguts de proporció, àrees, perímetres...

12. Estimacions: portada a la pràctica per Bernat Ancochea, en aquesta activitat es demanava estimar i confirmar diferents mesures. Exemples: mides de la plaça, alçària d'un edifici, angle que forma una paret, capacitat dels cilindres que delimiten una part de la plaça, nombre de quadrats que hi ha a la finestra de ferro... S'entregava un full amb totes les propostes d'estimació, que es poden trobar a https://ja.cat/zmnDl.

13. Maquetem Mataró: portada a la pràctica per Roser García i Berta Mas, en aquesta activitat grup de treball de professors d'instituts de la ciutat va proposar treballar des de les escoles de Mataró les matemàtiques vinculades a l'exposició de la maqueta de la ciutat, creada per alumnes majoritàriament de segon d'ESO, que fa tres anys que es duu a terme. En la jornada es van presentar algunes activitats ja fetes sobre què veiem al plànol que no veiem *in situ* i al revés; per exemple, sobre si és el mateix córrer vint metres pel passeig Marítim que per la Riera, es mostrava sobre un plànol una fletxa de la mateixa mida sobre un lloc i sobre l'altre, així podíem comentar el tema de la topografia de la ciutat; també vam visualitzar rotondes que tenen un altre carrer fet de manera concèntrica i preguntàvem com ho devien construir, visualitzàvem rotondes no «rodones» i hi posàvem noms i buscàvem carrers completament paral·lels entre ells...

També vam proposar una activitat de creació d'hiperboloides, que va ser un èxit i va fer que acabéssim el material una hora abans de finalitzar la jornada.

14. Divermazo: portat a la pràctica per Luis Cros, és un joc de taula, però a la jornada es va emprar per mostrar la història de les matemàtiques. A partir dels coneixements dels assistents sobre personatges il·lustres d'aquesta ciència es fa un recorregut per curiositats matemàtiques per poder parlar d'on surten els coneixements que utilitzem i aprenem avui en dia. Entre els temes que vam tractar hi ha la importància de les dones en el desenvolupament de les matemàtiques.

A la taula va haver-hi gent tota l'estona, de totes les franges d'edat. Per als nens més petits és una taula poc atractiva, però exposada amb cura pot arribar a agradar-los i a transmetre'ls una mica de coneixements per a quan trobin alguns dels personatges a l'aula.

La jornada va ser un èxit rotund, ja que van participar-hi al voltant de dues-centes persones. Per animar a jugar-hi es donava a la gent una targeta abans de passar per les diferents taules i quan passaven per cada activitat se'ls posava un gomet. Si aconseguien deu gomets, que volia dir que havien participat en deu activitats, podien lliurar la targeta i participar en el sorteig d'unes cúpules de Leonardo de sobretaula.

També va ser un èxit per la ubicació, a la plaça de l'Ajuntament, un lloc de pas per arribar a la gent que no té relació amb l'educació ni amb les matemàtiques. Aquest és el principal objectiu del Mates al Carrer: portar les matemàtiques a tothom.

Com a propostes de millora entomem la que ens va fer arribar Isabel Cabot, cap del Departament de Matemàtiques de l'escola Salesians Mataró: proposar als alumnes més grans (a partir de tercer d'ESO) de les escoles de la localitat, presentar alguna taula. Això els implica en la jornada i els convida a apropar-se als seus companys, amics i familiars. A partir d'aquesta experiència va sorgir la idea que l'alumnat de tercer d'ESO preparés una fira d'aquestes característiques a la seva escola dirigida al cicle superior de primària i a primer i segon d'ESO.

Per part seva també vam rebre unes paraules que vam escoltar de molta gent el mateix dia en acabar la jornada: «Les activitats i la fira ens va agradar molt i ens sembla una idea fantàstica. Moltes gràcies per tota la feinada i l'organització».

El grup organitzador volem donar les gràcies al Comitè Local, l'Escola de Música, la Biblioteca Municipal, l'Ajuntament, a tots els voluntaris i a la FEEMCAT: sense el seu suport i la seva col·laboració la jornada no hauria sigut possible.

5. I ara què?

Quan tinguis aquesta revista a les mans estarem preparant la tercera edició del Mates al Carrer, la de Balaguer el 2024. Et convidem a portar una taula d'activitat i a formar part de l'equip d'organització o del comitè local de preparació d'aquesta edició o de les properes. També tenim pactada la quarta edició, que farem a Lleida la primavera de 2025.

Paral·lelament a aquesta via que hem començat a Catalunya, s'ha reobert la proposta de la FESPM d'aconseguir fer un Matemáticas en la Calle des de totes les federacions el mateix dia. També el 28 d'octubre vam participar en un seminari nacional per veure què es pot fer. Us mantindrem informats de tot mitjançant les vostres associacions i les jornades que anem fent al nostre territori.

Esperem que aquest article serveixi per donar a conèixer el projecte i convidar el lector a divulgar-lo i a sumar-s'hi. Els organitzadors del «Mates al carrer» som: Carme Aymerich, Bernat Ancochea, Tuti Comalat, Luis Cros, Marta Farrés, Roser García, Pura Fornals, Carles Masjuan, Judit Rodríguez, Glòria Sánchez i Ramón Tejedor.

6. Referències

[1] Alsina, C. (2008). *El club de la hipotenusa*. Barcelona: Planeta.
[2] *Math City Map*. 2019. https://mathcitymap.eu/es/.
[3] *Reptes c2em 2020-2024*. 2021. https://c2em.feemcat.org/reptes-c2em-2020-2024/.

Normes per a la presentació de contribucions

1. La revista *Nou Biaix* accepta per a la seva publicació contribucions originals relacionades amb experiències didàctiques, activitats d'ensenyament i aprenentatge, escrits d'opinió, de divulgació i d'investigació en el camp de la matemàtica i el seu ensenyament en qualsevol nivell educatiu.
2. Les contribucions rebudes seran avaluades prèviament per dos especialistes reconeguts. La decisió presa pel Consell de redacció sobre l'acceptació de la publicació serà notificada directament als autors amb una indicació de la data aproximada de publicació i el possible requeriment d'introduir modificacions en el text.
3. Per a la presentació de treballs originals, els autors trametran a l'adreça noubiaix@gmail.com un arxiu, en Word o en LaTeX. Els gràfics, els diagrames i les figures hauran de ser originals (no fotocopiats). Els arxius gràfics es presentaran en format eps o tif.
4. La contribució haurà d'incorporar el títol, el nom de l'autor o autors, la seva adreça postal professional completa i la seva adreça electrònica. S'adjuntarà un resum no més llarg de 300 paraules en català i anglès. Al final del document s'inclourà obligatòriament la bibliografia per ordre alfabètic de cognoms, d'acord amb la normativa APA, com en els exemples següents:

Articles

Albertí, M. (2002). Les matemàtiques des d'una perspectiva cultural: Etnomatemàtiques. *Biaix*, 20, 6-25.

Llibres

Godino, J., Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Capítols de llibres

Edo, M., Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. Dins M. Antón i B. Moll (ed.), *Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (p. 410/103-410/179). Barcelona: Praxis.

Actes de congressos

Morales, M., Font, V., Planas, N. (2004). Estudio microetnográfico en torno a un conocimiento matemático situado. Dins A. Franzé i altres (ed.), *Actas de la I Reunión Científica Internacional sobre Etnografía y Educación* (CD-ROM). València: Germanía, Polis Paideia.

Pàgines web

Geogebra per a Infantil i Primària.
https://www.geogebra.org/m/tkdC27mf

5. Els continguts de *Nou Biaix* estan subjectes —llevat que s'indiqui el contrari en el text, en les fotografies o en altres il·lustracions— a una llicència de Reconeixement-No comercial-Sense obra derivada 3.0 de Creative Commons, el text complet de la qual es pot consultar a http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca. Així, doncs, s'autoritza el públic en general a reproduir, distribuir i comunicar l'obra, sempre que es reconegui l'autoria i l'entitat que la publica, i no se'n faci un ús comercial ni se'n difongui cap obra derivada.
6. Els articles es publicaran en llengua catalana. Només es traduiran al català les contribucions acceptades d'autors no residents als Països Catalans.
7. Els autors es responsabilitzaran del compliment de les normes establertes per a l'autorització de la reproducció de material procedent d'altres fonts bibliogràfiques.
8. Els articles tindran una extensió màxima de 8000 paraules, incloses les notes a peu de pàgina, però s'accepten articles més curts, d'entre 2000 i 4000 paraules.
9. Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per tal de facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques.

feemcat

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES · I·E·C·

Societat Catalana de Matemàtiques

ISSN 2014-2021